

KDO DU 8/10/2026

Un endomorphisme défini par une intégrale impropre

-
1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
 2. Soit une fonction $f \in E$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du.$$

Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bien définie, qu'elle est bornée, qu'elle est dérivable et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.

3. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif?
4. Déterminer toutes les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.
5. Déterminer le spectre de Φ .
6. Prouver que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale $K_i = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est convergente et la calculer.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t) dt$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice $M = (m_{ij})$ de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.