

F E U I L L E D E T . D . N° 4

R é d u c t i o n

Exercice 1. Soient a et b deux réels. Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R}).$$

(On essaiera de deviner des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A .)

Exercice 2. Soient a et b deux réels et A la matrice de taille $n \times n$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $b - a$ est une valeur propre de A et déterminer une base du sous-espace propre correspondant.
2. Déterminer, s'il en existe, une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.

Exercice 3 (AB & BA).

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Calculer les deux produits matriciels par blocs

$$\begin{pmatrix} xI_n - BA & B \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & B \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix}.$$

En déduire que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique et donc le même spectre.

2. Supposons que A est inversible et que AB est diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 4 ($u \circ v$ & $v \circ u$). Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que : si $\lambda \neq 0$, alors λ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda = 0$.
3. Soit, pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$u(P) = P' \quad \text{et} \quad v(P) = \int_0^X P(t) dt$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Conclure.

Exercice 5 (Banque PT 2007, épreuve A). Soient n un entier naturel et f l'endomorphisme qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$f(P) = (X^2 - 1) \cdot P'' + X \cdot P'.$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f .
2. L'endomorphisme φ_n induit par f sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer le noyau $\text{Ker}(\varphi_n)$ de l'endomorphisme φ_n . Et le noyau $\text{Ker}(f)$ de l'endomorphisme f .
4. Montrer que, pour chaque entier naturel k , il existe un unique polynôme unitaire T_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$(X^2 - 1) \cdot T_k'' + X \cdot T_k' - k^2 \cdot T_k = 0.$$

Quel est le degré de ce polynôme T_k ? Déterminer les polynômes T_0 , T_1 et T_2 .

Exercice 6 (La matrice compagnon).

Soient $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{p-3} & -a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pp}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de la matrice M si, et seulement si,

$$\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

de deux manières :

- en calculant le polynôme caractéristique de M ;
 - en recherchant les vecteurs propres associés au scalaire λ .
2. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ ? Montrer que la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, elle possède p valeurs propres distinctes deux à deux.

Exercice 7 (Discuter suivant les valeurs des paramètres).

Soient a, b et c trois réels. Soient, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des réels a, b et c ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Exercice 8 (Une matrice de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace n'est pas nulle).

▷ **TD n°2 exo 4 : matrices de rang 1 et base adaptée**

On considère une matrice M de taille $n \times n$ et de rang 1.

1. On suppose que $\text{tr}(M) = 0$. Montrer que M n'est pas diagonalisable et préciser le spectre de M .
2. Réciproquement, on suppose que $\text{tr}(M) \neq 0$. Montrer que M est diagonalisable et préciser son spectre.

Exercice 9 (Matrices stochastiques). On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $U = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Montrer que A est stochastique si, et seulement si, tous ses éléments de matrice sont positifs et $AU = U$. En déduire que 1 est une valeur propre de toute matrice stochastique et que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.
2. Montrer que le spectre (réel) d'une matrice stochastique est inclus dans $[-1, +1]$.
3. On suppose que tous les éléments $a_{i,j}$ d'une matrice A stochastique sont strictement positifs. Montrer que le sous-espace propre $\text{Ker}(I_n - A)$ est égal à $\text{Vect}(U)$.

Exercice 10 (Trigonalisation & équations différentielles).

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable. Est-elle trigonalisable ?
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et les déterminer.
3. En déduire toutes les solutions, sur $\mathbb{R}$, du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

Exercice 11 (Commutation et stabilité ▷ **proposition IV.35**). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de la matrice A et trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
2. Soit B une matrice de taille 3×3 qui commute avec A ($AB = BA$). Montrer que B est diagonalisable.

Exercice 12. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $M^5 = M^2$. En déduire une relation d'inclusion entre les deux ensembles $\text{Sp}(M)$ et $\{0, 1, j, j^2\}$, où $j = e^{i2\pi/3}$.
2. On suppose de plus que $\text{tr}(M) = n$. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de la matrice M . Cette matrice est-elle inversible ?
3. Déterminer toutes les matrices M telles que $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

Exercice 13 (Polynômes annulateurs).

1. ▷ **TD n° 2 exo 15** — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M)I_n + M$. Déterminer les éléments propres (*id est* les valeurs propres et les sous-espaces propres) de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
2. ▷ **TD n° 2 exo 15** — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(M) = PM + MP$. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
3. ▷ **Colle n° 3** — On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Soit un polynôme $A(X) \in E$ tel que le réel $a = \int_0^1 A(t) dt$ est non nul. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme

$$u : E \rightarrow E, P(X) \mapsto A(X) \int_0^1 P(t) dt - P(X) \int_0^1 A(t) dt.$$

Exercice 14. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^2)$.
2. On suppose que A^2 est diagonalisable.
Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^2)$.
3. Donner un exemple de matrice A telle que A^2 soit diagonalisable mais pas A .

Exercice 15. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'endomorphisme

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto [(aX + b)P]'$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de (a, b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?