

CORRIGÉ DU KDO DU 12/10/2026

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ converge.
2. Montrer que

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

3. Par le changement de variables $u = \tan \theta$, déterminer la valeur de I .
-

1. L'intégrale I est impropre en -1 et en $+1$. converge si, et seulement si, les deux intégrales

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+1} \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

convergent.

- Commençons par l'intégrale I_2 , impropre en $+1$: $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ car $\frac{1}{2-x^2} \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} 1$ et

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ne change pas de signe et

$\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ converge d'après le critère de Riemann décalé en 1.

D'où l'intégrale I_2 converge.

AUTRE MÉTHODE : $\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge car : pour tout $y \in [0, 1[$, $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\text{Arcsin} x]_0^y = \text{Arcsin} y \underset{y \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. D'où l'intégrale I_2 converge.

- Et, de même, l'intégrale I_1 est convergente.
 - Finalement, l'intégrale I converge.
2. Le changement de variable $x = \sin \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $dx = \cos \theta d\theta$, $2 - x^2 = 1 + \cos^2 \theta$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos \theta| = \cos \theta$ car $\cos \theta$ est positif sur l'intervalle d'intégration. Donc

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos^2 \theta) \cos \theta} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

3. Le changement de variable $u = \tan \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $du = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = (1 + u^2) d\theta$,

$$\frac{1}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + u^2}}, \text{ d'où } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + u^2}} \frac{du}{1 + u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + u^2} du.$$

$$\text{Or } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2 + u^2} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (u/\sqrt{2})^2} du = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2} \arctan(u/\sqrt{2}) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$