

CORRIGÉ DU KDO DU 8/10/2026

Un endomorphisme défini par une intégrale impropre

1. Justifier que l'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. Soit une fonction $f \in E$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du.$$

Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est bien définie, qu'elle est bornée, qu'elle est dérivable et que sa dérivée $\Phi(f)'$ est égale à $\Phi(f) - f$.

3. Justifier que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif?
4. Déterminer toutes les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.
5. Déterminer le spectre de Φ .
6. Prouver que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale $K_i = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est convergente et la calculer.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t) dt$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice $M = (m_{ij})$ de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. L'ensemble E des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue et bornée et car toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. En effet : si $\exists (M, N) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} |f(x)| \leq M \\ |g(x)| \leq N \end{cases}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| |f(x)| + |\beta| |g(x)| \leq |\alpha| M + |\beta| N$.

2.

La fonction $\Phi(f)$ est bien définie

 car l'intégrale impropre $\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ converge. En effet, $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in$

$\mathbb{R}, |f(t)| \leq M$. D'où $|e^{-u} f(u)| \leq M e^{-u}$ pour tout $u \geq 0$. Or l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-u} du$ converge. Donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ converge absolument.

D'après l'inégalité triangulaire, $|\Phi(f)(x)| = \left| e^x \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt \right| \leq e^x \int_0^{+\infty} |e^{-t} f(x+t)| dt \leq e^x M \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = M$

pour tout réel x . Donc

la fonction $\Phi(f)$ est bornée.

$$\Phi(f)(x) = e^x \cdot \left(\int_7^{+\infty} e^{-u} f(u) du - \int_7^x e^{-u} f(u) du \right) = e^x \cdot (K - G(x)),$$

en notant $K = \int_7^{+\infty} e^{-u} f(u) du$ et $G : x \mapsto \int_7^x e^{-u} f(u) du$ une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^{-u} f(u)$. Par

suite, la fonction $\Phi(f)$ est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)'(x) = e^x (K - G(x)) + e^x (0 - G'(x)) = \Phi(f)(x) - f(x)$$

car $G'(x) = e^{-x} f(x)$. Donc $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$.

3. D'une part, l'application Φ est linéaire; d'autre part, $\Phi(f)$ appartient à E pour tout $f \in E$. En effet, la fonction $\Phi(f)$ est continue car dérivable d'après la question précédente. Et elle est aussi bornée d'après la question précédente.

Donc Φ est un endomorphisme de E .

Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f)$ est nulle, alors elle est constante et sa dérivée $\Phi(f)'$ est donc nulle. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$

d'après la question précédente. D'où $f = 0$. Donc $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$. D'où l'application linéaire Φ est injective.

Φ n'est pas surjective car la fonction $x \mapsto x$ si $x \in [0, 1]$, $2 - x$ si $x \in [1, 2]$, 0 sinon est continue et bornée, et

appartient donc à E . Mais n'est pas dérivable et n'appartient donc pas $\text{Im } \Phi$ d'après la question précédente.

4. ANALYSE : Soit $f \in E$. Si la fonction $\Phi(f) = f$, alors $\Phi(f)' = f'$. Or $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$. D'où $f' = 0$. Donc la fonction f est constante

SYNTHÈSE : Si f est constante, alors $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} K e^{-t} dt = K$. Donc $\Phi(f) = f$.

CONCLUSION : $\Phi(f) = f$ si, et seulement si, la fonction f est constante.

5. Des deux questions précédentes, il résulte que 0 n'est pas une des ces valeurs et que 1 en est une. Soit maintenant un réel $\lambda \notin \{0; 1\}$. Si $\Phi(f) = \lambda f$, alors $\Phi(f)' = \lambda f'$ et, de $\Phi(f)' = \Phi(f) - f$, il résulte que $\lambda f' = (\lambda - 1)f$, d'où $f' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f$ car $\lambda \neq 0$. On résout cette équation différentielle : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = K e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda} x}$. Or $\lambda \neq 1$, donc : ou bien $K = 0$ (et alors $f = 0$), ou bien f n'est pas bornée (et alors $f \notin E$). Dans les deux cas, la valeur λ ne convient pas. D'où l'équation

$\Phi(f) = \lambda f$ possède une solution non nulle dans E ssi $\lambda = 1$, id est $\text{Sp}(\Phi) = \{1\}$.

6. L'intégrale $K_i = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt$ est impropre en $+\infty$. Elle est convergente car la fonction $t \mapsto t^i e^{-t}$ est continue et $t^i e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Or $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

On montre par récurrence sur i que $K_i = i!$:

- $K_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
- Supposons que $K_i = i!$ pour un entier $i \in \mathbb{N}$ et intégrons par partie : $K_{i+1} = \int_0^{+\infty} u v' dt$ et les fonctions $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^{i+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $K_{i+1} = [-t^{i+1} e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (i+1) t^i e^{-t} dt = (i+1) K_i$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{i+1} e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

D'où $K_{i+1} = (i+1) \cdot i! = (i+1)!$.

- Donc $K_i = i!$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

7. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$: pour tout $t \in [0, +\infty[$, $(x+t)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} t^{j-i} x^i$.

L'intégrale $L_j(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^j dt$ est convergente car c'est la combinaison linéaire $L_j(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} x^i K_{j-i}$ des $j+1$

intégrales convergentes K_i . Or $K_{j-i} = (j-i)!$ et $\binom{j}{i} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$. Donc

$$L_j(x) = \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i!} x^i.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$, d'où $\varphi(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t) dt$ est une intégrale convergente car c'est la combinaison linéaire $\varphi(P)(x) = \sum_{j=0}^n a_j L_j(x)$ des $n+1$ intégrales convergentes $L_j(x)$. De plus, $\varphi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n car c'est la combinaison linéaire $\sum_{j=0}^n a_j L_j$ des polynômes L_j de degrés $j \leq n$. Enfin, φ est une application linéaire car $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$

pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de l'intégrale. Donc

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

et

sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure :

$$M = \begin{matrix} & \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \cdots & \varphi(X^n) \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 1 & 2 & & n! \\ 0 & 0 & 1 & & n!/2 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = (m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}, \quad \text{où } m_{ij} = \frac{j!}{i!} \text{ si } i \leq j \text{ et est nul sinon}$$

$$\text{car } L_j = \sum_{i=0}^j \frac{j!}{i!} X^i.$$