

D.S. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

40

PROBLÈME

Ce problème porte sur les matrices nilpotentes, c'est-à-dire les matrices M carrées telles que : $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = 0$. On rappelle que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente M est l'unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$ et $M^{k-1} \neq 0$.

Notations

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

On pose $J_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour chaque entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

On rappelle que les règles du calcul matriciel permettent d'additionner et de multiplier par blocs les matrices.

Si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, $\dots$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, alors on note $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

6

Partie A – Étude d'un exemple

Pour chaque complexe β , on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta + 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta + 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A_0 est nilpotente, déterminer son indice de nilpotence et montrer qu'elle est semblable à la matrice J_3 . 0,5 0,5 2,5 vecteurs 1,5 indice 1
2. On suppose que $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $A_\beta X = \beta X$. La matrice A_β est-elle nilpotente ? 2,5 1,5 1

8

Partie B – Les matrices de carré nul

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : si le déterminant et la trace de A sont nuls, alors $A^2 = 0$. La réciproque est-elle vraie ? 2 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r et de carré nul : $\text{rg}(A) = r$ et $A^2 = 0$.

4. Soit u l'endomorphisme représenté par la matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E . Montrer que :

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u) \quad \text{et} \quad 2r \leq n.$$

On suppose dans la suite de cette partie que la dimension n de E est supérieure ou égale à 3.

5. On se place dans le cas où $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille

$$\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$$

est une base de E .

6. Exprimer la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}'$. (On utilisera les matrices J_α et la notation diag indiquées au début de l'énoncé.) 1

7. On se place dans le cas où $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer que la matrice A est semblable à

$$\text{diag}(J_2, \dots, J_2, (0)_{n-2r})$$

avec r blocs diagonaux J_2 suivis de la matrice nulle $(0)_{n-2r}$ de $\mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C})$.

6

Partie C – Endomorphismes échangeurs

On dit qu'un endomorphisme u de E est *échangeur* s'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que :

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F.$$

8. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Soient les matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et 0,5

$$M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Montrer que la matrice M est la somme de deux matrices de carrés nuls.

2 9. Soit u un endomorphisme échangeur.

Montrer qu'il existe deux endomorphismes a et b tels que $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

Soit u un endomorphisme bijectif de E tel que $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

3 10. Montrer que $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$, que $\text{Ker}(a) = \text{Im}(a)$ et que $\text{Ker}(b) = \text{Im}(b)$.

0,5 11. En déduire que u est échangeur.

12

Partie D - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent, d'indice p , de E .

1 12. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Dans la suite, on note a un tel vecteur et $\mathcal{B}_a$ la famille libre $(u^k(a))_{0 \leq k \leq p-1}$.

0,5 13. Montrer que l'indice de nilpotence p de u est inférieur ou égal à la dimension n de E .

1 14. En déduire que la matrice A_0 de la première partie du problème ne possède aucune racine carrée, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A_0$.

1,5 15. Justifier que l'endomorphisme $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$, $x \mapsto u(x)$ est bien défini. Montrer qu'il est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

0,5 16. Montrer que le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille $\mathcal{B}_a$ est stable par u .

0,5 17. Soit v l'endomorphisme induit par u sur C_a . Déterminer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_a$.

3 18. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{C}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $Q \mapsto Q'$. Montrer qu'il existe exactement $p+1$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ (que l'on déterminera) stables par l'endomorphisme f .

1 19. Construire une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_p .

2 20. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de C_a stables par u .

8

Partie E - Matrices toutes-puissantes

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *toute-puissante* si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^k$.

1 21. Montrer que, si une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente et toute-puissante, alors elle est nulle.

0,5 22. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 : $V(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Démontrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^n Q$.

3 23. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^p + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

0,5 24. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + X = U^p + X^n Q$.

1 25. Soit une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Démontrer que la matrice $I_n + N$ est toute-puissante.

2 26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. Montrer que la matrice $\lambda I_n + N$ est toute-puissante.

15

EXERCICE

En étudiant les formes linéaires sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,
on se propose de montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.
Et que la trace est, à un facteur près, l'unique forme linéaire f sur E telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$.

Notations :

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- E désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E .
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E .
- Pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note K_r la matrice $\sum_{i=1}^r E_{i,i} = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r éléments diagonaux égaux à 1 suivis de $n - r$ zéros.
- Pour chaque $A \in E$, on définit la forme linéaire $T_A \in E^*$ par $T_A(M) = \text{tr}(AM)$. Et l'ensemble H_A par $H_A = \{M \in E \mid \text{tr}(AM) = 0\}$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant, qui est au programme de la première année :

Si $A \in E$ est de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors il existe deux matrices inversibles U et V de E telles que $UAV = K_r$.

1. Soit A une matrice de E .

- 1 (a) Montrer que : si A est une matrice symétrique, alors toute matrice antisymétrique appartient à H_A .
- 1.5 (b) Montrer que : si la matrice A n'est pas nulle, alors H_A est un hyperplan de E . *0,5 définition d'un hyperplan.*
- 1.5 (c) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de H_A .

2. 1 (a) Soit $A = (a_{k,l})_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une matrice de E . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $T_A(E_{i,j})$.

- 1 (b) En déduire que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe une unique matrice A de E telle que $f = T_A$.

- 1 (c) En utilisant l'application $\varphi : E \rightarrow E^*$, $A \mapsto T_A$, en déduire la dimension du dual E^* . *0,5 φ linéaire
0,5 φ bijective*

3. On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de E .

- 1 (a) Vérifier que P est inversible et que, pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice P appartient à H_{K_r} . *0,5*
- 3 (b) En déduire que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

4. 4 Soit une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$ pour toutes matrices M et N de E .

On rappelle (inutile de le reprouver) qu'une matrice de E commute avec toutes les matrices de E si, et seulement si, elle est colinéaire à I_n .

En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \text{tr}$.