

PROGRAMME DE LA COLLE N° 4

Semaine du 2/11/2026

• Intégrales généralisées ▷ Chapitre III & TD n° 3.

Étudier la nature de l'intégrale, voire calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, impropre à une extrémité ou aux deux extrémités :

1. primitive d'une fonction continue sur un intervalle ;
2. sommes de Riemann ;
3. intégrale d'une fonction *cpm* sur un segment ;
4. fonction *cpm* sur un intervalle ;
5. intégrales faussement impropres ;
6. critères de Riemann en 0 (ou décalé en $a \in \mathbb{R}$) et en $+\infty$;
7. intégrales de référence $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-Kt} dt$;
8. comparaison $\leq$, équivalence $\sim$, o et O de fonctions positives ;
9. convergence absolue (qui implique la convergence) ;
10. comparaison série-intégrale ;
11. intégration par partie :
 - en se ramenant au cas d'une intégrale sur un segment avant d'étudier la limite ;
 - ou directement avec l'intégrale généralisée (en prenant soin d'étudier la nature du terme entre crochets) ;
12. changement de variable (*CDV*) :
 - en se ramenant au cas d'une intégrale sur un segment (sous l'hypothèse *CDV* $\mathcal{C}^1$) ;
 - ou directement avec l'intégrale généralisée (sous l'hypothèse *CDV* $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) ;

13. intégration des relations de comparaison (par analogie avec les somme partielle et reste d'une série) ;

14. formule de Taylor avec reste intégral.

• Réduction ▷ Chapitre IV & TD n° 4 :

- vecteurs propres, sous-espaces propres, valeurs propres et spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- un endomorphisme u est injectif ssi $0 \notin \text{Sp}(u)$;
- les racines du polynôme caractéristique χ_A sont les valeurs propres de la matrice carrée A et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), 1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda ;$$

- si χ_A est scindé, alors $\text{tr } A = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda$ et $\det A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}$;
- déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ;
- les *SEP* sont en somme directe ;
- une matrice carrée A est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses *sep* égale la taille de la matrice, ssi χ_A est scindé et la dimension de chaque *sep* égale la multiplicité de la valeur propre, ssi ses *SEP* sont supplémentaires ;
- une matrice carrée de taille n est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes deux à deux ;
- une matrice carrée est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé ;
- trigonaliser une matrice carrée sous une forme donnée ;
- utiliser la diagonalisation ou la trigonalisation pour découpler et résoudre un système linéaire de suites définies par récurrence ou un système linéaire d'équations différentielles, à coefficients constants et sans second membre.