

Colle 03 Polynômes d'endomorphismes

BODIN Louise

Exercice 1. Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Pour $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, on note $d(M)$ son indice de nilpotence.

1. Montrer que $\mathbb{C}[M]$ est de dimension $d(M)$
2. Montrer que $I_n + M$ est inversible, puis que $d(2M + M^2) = d(M)$.
3. Montrer que $M \mapsto 2M + M^2$ est injective sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Est-elle bijective dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$?

Solution 1.

1. Si $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, alors son polynôme minimal est $\pi_M = X^d$ où $d = d(M)$ est son indice de nilpotence. L'espace $\mathbb{C}[M]$ est l'image du morphisme d'algèbres $P \mapsto P(M)$. Par le théorème de division euclidienne, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $P = \pi_M Q + R$ avec $\deg R < d$. Comme $\pi_M(M) = 0$, on a $P(M) = R(M)$, d'où $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}_{d-1}[M]$. De plus, si $\sum_{i=0}^{d-1} a_i M^i = 0$, le polynôme $R = \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ est un polynôme annulateur de M de degré strictement inférieur à $\deg \pi_M$. Par définition du polynôme minimal, $R = 0$, donc la famille $(I_n, M, \dots, M^{d-1})$ est libre. On en déduit que $\dim \mathbb{C}[M] = d = d(M)$.
2. On calcule directement le produit avec la somme géométrique tronquée :

$$(I_n + M) \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k M^k = I_n + (-1)^{d-1} M^d = I_n$$

Donc $I_n + M$ est inversible (et son inverse est un polynôme en M).

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(2M + M^2)^k = M^k (2I_n + M)^k = 2^k M^k \left(I_n + \frac{M}{2} \right)^k$$

Comme $\frac{M}{2}$ est nilpotente, la matrice $I_n + \frac{M}{2}$ est inversible d'après ce qui précède. Sa puissance k -ième l'est également. Par conséquent, $(2M + M^2)^k = 0 \iff M^k = 0$. On en déduit immédiatement que l'indice de nilpotence est conservé : $d(2M + M^2) = d(M)$.

3. L'équation $2M + M^2 = A$ se réécrit $(I_n + M)^2 = I_n + A$. Montrons que l'application est bijective. Surjectivité : Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Puisque $A^n = 0$, considérons le polynôme $P(X)$ correspondant à la troncature à l'ordre $n - 1$ du développement de $\sqrt{1 + X} - 1$ en 0 :

$$P(X) = \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \dots + c_{n-1}X^{n-1}$$

Par construction du développement limité, $(1 + P(X))^2 = 1 + X + X^n Q(X)$. En évaluant ce polynôme en A , puisque $A^n = 0$, il reste $(I_n + P(A))^2 = I_n + A$. Posons $M_0 = P(A)$. Comme $P(0) = 0$, M_0 est un polynôme en A sans terme constant, c'est donc un multiple de A . La matrice M_0 est donc nilpotente. On a bien $M_0 \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $2M_0 + M_0^2 = A$. L'application est surjective.

Injectivité : Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ tel que $2M + M^2 = A$. Remarquons que M commute avec A car $AM = (2M + M^2)M = M(2M + M^2) = MA$. Puisque $M_0 = P(A)$ est un polynôme en A , M commute également avec M_0 . L'équation donne $(I_n + M)^2 = (I_n + M_0)^2$, d'où :

$$(I_n + M)^2 - (I_n + M_0)^2 = 0$$

Les matrices $I_n + M$ et $I_n + M_0$ commutant, on peut factoriser :

$$(M - M_0)(2I_n + M + M_0) = 0$$

Or, M et M_0 sont nilpotentes et commutent, donc leur somme $M + M_0$ est une matrice nilpotente. Il s'ensuit que la matrice $2I_n + M + M_0 = 2(I_n + \frac{M+M_0}{2})$ est inversible (toujours d'après la question 2). En multipliant à droite par son inverse, on obtient $M - M_0 = 0$, c'est-à-dire $M = M_0$. L'application est donc injective, et finalement bijective sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

LEBRETON Auguste

Exercice 2.

1. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $4A^3 = 4A^2 - A + I_n$, où I_n est la matrice identité.
 - (a) Montrer que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M que l'on déterminera en fonction de A .
 - (b) Montrer que M la matrice d'une projection que l'on caractérisera.
2. Soit la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) On suppose que $B^2 + B + I_n = 0$, montrer que n est pair.
 - (b) On suppose que $B^3 + B^2 + B = 0$, montrer que le rang de B est pair.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E . Montrer que $\text{rg } f^4 = \text{rg } f^3$.

Solution 2.

1. (a) On pose le polynôme $P = 4X^3 - 4X^2 + X - 1 = 4(X-1)(X - \frac{i}{2})(X + \frac{i}{2})$. P annule A .
On fait la division euclidienne de X^p par P : $X^p = Q_p(X)P(X) + R_p(X)$ avec

$$R_p(X) = Q_p(X)P(X) + \alpha_p(X - \frac{i}{2})(X + \frac{i}{2}) + \beta_p(X + \frac{i}{2})(X - 1) + \gamma_p(X - \frac{i}{2})(X - 1)$$

qui donne le système pour $X = 1, i/2$ et $-i/2$:

$$\begin{cases} 1 = \alpha_p(1 - \frac{i}{2})(1 + \frac{i}{2}) \\ \left(\frac{i}{2}\right)^p = \beta_p i \left(\frac{i}{2} - 1\right) \\ \left(-\frac{i}{2}\right)^p = \gamma_p i \left(\frac{i}{2} + 1\right) \end{cases}$$

On en déduit $\alpha_p = \frac{4}{5}$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma_p = 0$.

On obtient finalement

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p = \frac{4}{5}(A - \frac{i}{2}I_n)(A + \frac{i}{2}I_n) = \frac{1}{5}(4A^2 + I_n) = M.$$

- (b) On a $\lim_{p \rightarrow +\infty} A^{2p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} A^p$, donc $M^2 = M$ et M est un projecteur.

On montre que l'image de M est égale à $\ker(A - I_n)$: on a $(A - I_n)M = 0$ d'où une inclusion et dans l'autre sens si $AV = V$, alors $A^pV = V$ et donc $LV = V$ et $V \in \text{Im } M$.

Enfin $M(A - I_n) = 0$ montre que $\text{Im}(A - I_n) \subset \ker M$ et avec le théorème du rang on obtient l'égalité. M est donc la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.

2. (a) $X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de B de racine j et $j^2 = \bar{j}$. Le théorème des noyaux nous dit que $E = \ker(B - jI_n) \oplus \ker(B - j^2I_n)$. Mais $\ker(B - jI_n) \rightarrow \ker(B - jI_n)$, $X \mapsto \bar{X}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire et c'est un isomorphisme. Donc ils ont même dimension et $\dim E$ est paire.
On pourra dire bientôt que $X^2 + X + 1$ n'ayant pas de racines réelle, le polynôme caractéristique de B n'a pas de racines réelles non plus et donc est de degré pair, la dimension de E .

- (b) Avec les abus de notations usuelles, $\text{Im } B$ stable par B et la restriction à $\text{Im } B$ vérifie $1/$, donc le rang de B est pair.

Solution 3. On sait que la suite des images de f^k est décroissante et que si on a égalité à partir d'un certain rang, alors la suite se stabilise.

Si $\text{Im } f = E$, alors la suite des images est constante, égale à E . Donc la propriété est vraie.

On suppose désormais que $f \neq 0$ et on va procéder par l'absurde : Supposons que $\text{rg } f^4 < \text{rg } f^3$. Alors la suite $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f^3 \subset \text{Im } f^4$ est strictement décroissante. Par hypothèse, $\text{rg } f \leq 2$, puis $\text{rg } f^3 \leq 0$ et enfin f^4 serait de rang négatif, ce qui est absurde. Donc la suite des images se stabilise avant, on a nécessairement $\text{rg } f^4 = \text{rg } f^3$.

De même, si E est de dimension n , alors $\text{rg } f^n = \text{rg } f^{n+1}$.

PALIERNE Axelle

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E .

1. Pour $x \in E$ non nul, on définit $\text{Ann}(x) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$.
Montrer que $\text{Ann}(x)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire que $(\text{Ann}(x), +)$ est un sous-groupe et pour tous $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \text{Ann}(x)$, alors $PQ \in \text{Ann}(x)$.
En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x tel que

$$P(u)(x) = 0 \iff \pi_x \text{ divise } P$$

2. Montrer que $\deg(\pi_x) = \dim(\text{Vect}\{u^k(x), k \in \mathbb{N}\})$.
3. On suppose dans cette question que le polynôme minimal de u est de la forme $\pi_u = P^\alpha$ avec P un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe un vecteur e non nul tel que $\pi_u = \pi_e$.
4. S'il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ de E , stables par u tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$, on notera u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i et π_{u_i} son polynôme minimal.
Montrer que dans ce cas le polynôme minimal de u et $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{u_1}, \dots, \pi_{u_p})$.
5. L'endomorphisme u étant quelconque, montrer qu'il existe un vecteur e non nul tel que $\pi_u = \pi_e$.

Solution 4.

1. Même preuve que pour l'existence du polynôme minimal annulateur d'un endomorphisme.
2. La division euclidienne par π_u donne immédiatement le résultat.
3. on prend e tel que $\deg(\pi_e)$ soit maximal; on a $\pi_e | \pi_u$ donc $\pi_e = P^\beta$ avec $\beta \leq \alpha$. Si $x \in E$ alors $\pi_x = P^\gamma$ avec $\gamma \leq \beta$ donc $\pi_e(u)(x) = 0$ puis $\pi_e(u) = 0$ et $\pi_u | \pi_e$.
4. facile matriciellement dans une base adaptée.
5. $\pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$, lemme des noyaux avec $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i})$ puis $e_i \in E_i$ tel que $\pi_{e_i} = \pi_{u_i}$ et on prend $e = e_1 + \dots + e_p$. On a $P(u)(e) = \sum P(u)(e_i) = 0$ ssi $P(u)(e_i) = 0$ car $P(u)(e_i) \in E_i$ et la somme est directe. On en déduit $\pi_{e_i} | \pi_e$ puis $\pi_e = \text{ppcm}(\pi_{e_i})$.

XXX

Exercice 5. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(\phi^2) \oplus \ker(\phi - 2Id)$.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de ϕ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = \phi$. Montrer que $\ker(\phi^2)$ est stable par g . En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 6. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$, $B \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $I_n + a^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose

$$H = \{I_n + P(B) \mid P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}.$$

Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 7. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes qui sont premiers entre eux. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(A) = Q(A) = 0$?

Solution 5.

1. On vérifie que le polynôme $X^2 \times (X-2)$ est un polynôme annulateur de φ et on applique le théorème des noyaux.
2. On prend une base un vecteur $a \in \ker \varphi^2$ tel que $\varphi(a) \neq 0$. Alors $(\varphi(a), a)$ est une base de $\ker \varphi^2$ et on complète avec un vecteur tel que $u(b) = 2b$.
3. On a $\varphi \circ g = g^3 = g \circ \varphi$. Donc, si $\varphi(x) = 0$, alors $g(\varphi(x)) = 0$.
Si $g^2 = \varphi$, alors $\ker g \subset \ker g^2 = \ker \varphi$. Mais $\dim \ker \varphi = 1$, donc $\dim \ker g = 1$. On en déduit que $\ker g = \ker g^2$ et donc est encore égal à $\ker g^4 = E$, ce qui est impossible. Il n'existe pas g tel que $g^2 = I_n$.

Solution 6.

1. On calcule $(I_n + B)(I - B + B^2 + \dots + (-1)^{p-1}B^{p-1}) = I_n$, d'où $I + A^{-1}BA$ est inversible d'inverse $I - A^{-1}BA + A^{-1}B^2A + \dots + (-1)^{p-1}A^{-1}B^{p-1}A$.
2. Il est clair que H est non vide et stable par produit et que la multiplication est commutative. Il faut essentiellement prouver que $I + P(B)$ est inversible dans H : or $P(0) = 0$ montre que $P(B) = a_1B + \dots + a_dB^d$ et la formule du binôme montre que $P(B)^p = 0$ et on applique $1/$ à $P(B)$.

Solution 7. D'après le théorème de Bézout, comme $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, il existe $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X).R(X) + Q(X).S(X) = 1$.

Si on avait $P(A) = Q(A) = 0$, on aurait alors

$$I_n = (R.P + S.Q)(A) = R(A).P(A) + S(A).Q(A) = 0 + 0 + 0,$$

ce qui est impossible.

Une telle matrice A n'existe pas.