

1 Noyau égal à l'image

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\ker u = \operatorname{Im} u \iff u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim E = 2 \operatorname{rg}(u)$$

On commence par remarquer que, en toute dimension, $u^2 = 0$ équivaut à $\operatorname{Im} u \subseteq \ker u$: en effet $u^2 = 0$ signifie $u(u(x)) = 0$ pour tout x , c'est-à-dire que tout vecteur de la forme $u(x)$ est dans $\ker u$. La condition sur les dimensions permet alors de passer de l'inclusion à l'égalité.

Sens direct. Supposons $\ker u = \operatorname{Im} u$. En particulier $\operatorname{Im} u \subseteq \ker u$, donc $u^2 = 0$. Le théorème du rang donne par ailleurs, puisque $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ ont même dimension :

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u = 2 \operatorname{rg} u$$

Réciproque. Supposons $u^2 = 0$ et $\dim E = 2 \operatorname{rg} u$. De $u^2 = 0$ on tire $\operatorname{Im} u \subseteq \ker u$. Par le théorème du rang, il vient :

$$\dim \ker u = \dim E - \operatorname{rg} u = 2 \operatorname{rg} u - \operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$$

Le sous-espace $\operatorname{Im} u$ est inclus dans $\ker u$ et de même dimension finie : ils sont égaux.

D'où l'équivalence.

Un exemple : dans $\mathbb{K}^2$, l'endomorphisme $(x, y) \mapsto (y, 0)$ a pour noyau et pour image la droite $\operatorname{Vect}(e_1)$, et sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de carré nul et de rang $1 = \frac{2}{2}$. Plus généralement, en dimension $2r$, une matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ réalise la situation.

Attention

Attention, la condition $u^2 = 0$ seule ne suffit pas : l'endomorphisme nul de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 1$) est bien de carré nul, mais son noyau $\mathbb{K}^n$ n'est pas son image $\{0\}$. On remarque aussi que la condition sur les dimensions impose à $\dim E$ d'être paire.

2 Traces d'endomorphismes

Soient a et b deux réels, et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace des endomorphismes suivants.

1. $P \mapsto P(aX + b)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$, l'image de X^k est $(aX + b)^k = a^k X^k + (\text{termes de degré } < k)$ par la formule du binôme. La matrice est donc triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $a^0, a^1, \dots, a^n$, et la trace vaut :

$$\operatorname{Tr} = \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} & \text{si } a \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

On remarque que le réel b n'intervient pas, il ne modifie que les coefficients situés au-dessus de la diagonale. En particulier, pour $a = 1$, l'endomorphisme $P \mapsto P(X + b)$ a pour trace $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, comme l'identité.

2. $M \mapsto M^\top$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Première méthode. Dans la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la transposition envoie E_{ij} sur E_{ji} . La coordonnée de E_{ji} selon E_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon : seuls les n vecteurs E_{ii} contribuent à la trace, chacun pour 1. D'où $\operatorname{Tr} = n$.

Seconde méthode. La transposition τ est une symétrie, $\tau^2 = \operatorname{Id}$, par rapport au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, parallèlement au sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des antisymétriques, ces deux sous-espaces étant supplémentaires. Dans une base adaptée, sa matrice est $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec $\dim \mathcal{S}_n$ fois 1 et $\dim \mathcal{A}_n$ fois -1 , donc :

$$\text{Tr } \tau = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$$

On retrouve bien le même résultat : pour $i < j$, le couple (E_{ij}, E_{ji}) fournit la matrice symétrique $E_{ij} + E_{ji}$ et la matrice antisymétrique $E_{ij} - E_{ji}$, qui contribuent à la trace pour $1 - 1 = 0$, et il ne reste que les n matrices E_{ii} .

3. $M \mapsto AM$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons φ_A cet endomorphisme et $A = (a_{kl})$. Dans la base canonique, $\varphi_A(E_{ij}) = AE_{ij}$, et la matrice AE_{ij} a pour seule colonne non nulle la j -ième, égale à la i -ième colonne de A : $AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$. La coordonnée selon E_{ij} est le terme $k = i$, soit a_{ii} . En sommant sur tous les couples (i, j) :

$$\text{Tr } \varphi_A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ii} = n \sum_{i=1}^n a_{ii} = n \text{Tr } A$$

On peut aussi le voir de la façon suivante : multiplier M à gauche par A revient à appliquer A à chacune des n colonnes de M . En ordonnant la base canonique colonne par colonne, la matrice de φ_A est donc diagonale par blocs, avec n blocs égaux à A , d'où la trace $n \text{Tr } A$ (et au passage $\det \varphi_A = (\det A)^n$). Le même raisonnement sur les lignes donne $\text{Tr}(M \mapsto MA) = n \text{Tr } A$, et donc l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$ est de trace nulle.

4. $M \mapsto AMB$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons ψ cet endomorphisme, $A = (a_{kl})$ et $B = (b_{kl})$. Comme à la question précédente, on calcule dans la base canonique la coordonnée de $\psi(E_{ij}) = AE_{ij}B$ selon E_{ij} , c'est-à-dire son coefficient d'indice (i, j) . Seul le terme $k = i, l = j$ subsiste dans le produit, et il vient :

$$(AE_{ij}B)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} (E_{ij})_{k,l} b_{lj} = a_{ii} b_{jj}$$

En sommant sur tous les couples (i, j) , la somme double se factorise :

$$\text{Tr } \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ii} b_{jj} = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{jj} \right) = \text{Tr } A \text{Tr } B$$

On retrouve la question précédente pour $B = I_n$, puisque $\text{Tr } I_n = n$. Attention, ψ est la composée de $M \mapsto AM$ et de $M \mapsto MB$, de traces respectives $n \text{Tr } A$ et $n \text{Tr } B$: la trace d'une composée n'est pas le produit des traces, c'est ici la forme particulière de ces deux endomorphismes qui donne le résultat.

3



Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue, monotone et intégrable sur $]0, 1[$. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge vers $\int_0^1 f(t) dt$.

L'idée est d'encadrer chaque terme de la somme par des intégrales sur des intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, comme dans une comparaison série-intégrale. Quitte à remplacer f par $-f$, on suppose f croissante. Pour $1 \leq k \leq n-1$, la croissance donne :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt.$$

En sommant pour k de 1 à $n-1$, on obtient, en notant S_n la somme étudiée :

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t) dt \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt.$$

Les intégrales convergent aux deux bornes puisque f est intégrable sur $]0, 1[$, si bien que les deux membres tendent vers $\int_0^1 f$. Par encadrement, $S_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$.

Par exemple, avec $f = \ln$, on obtient $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \rightarrow -1$, ce qui redonne $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$, que l'on peut aussi obtenir à partir de la formule de Stirling.

4 Logarithmes

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\int_0^1 x^n \ln(1-x) dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

L'intégrale converge, l'intégrande étant un $O(|\ln(1-x)|)$ intégrable en 1. L'idée est d'intégrer par parties en choisissant la primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}-1}{n+1}$ de $x \mapsto x^n$, qui s'annule en 1 et compense ainsi la singularité du logarithme. Sur $[0, b]$ avec $b < 1$:

$$\int_0^b x^n \ln(1-x) dx = \left[\frac{x^{n+1}-1}{n+1} \ln(1-x) \right]_0^b - \frac{1}{n+1} \int_0^b \frac{1-x^{n+1}}{1-x} dx.$$

Le crochet tend vers 0 quand $b \rightarrow 1$, car $x^{n+1} - 1 \sim (n+1)(x-1)$ et $(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0$. Comme $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$, il vient :

$$\int_0^1 x^n \ln(1-x) dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$ selon l'entier n , et la calculer quand elle converge.

Pour $n \leq 1$, l'intégrande est minoré par $\frac{\ln x}{x}$, qui admet pour primitive $\frac{\ln^2 x}{2}$, de limite infinie : l'intégrale diverge. Pour $n \geq 2$, $\frac{\ln x}{x^n} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ et l'intégrale converge. Une intégration par parties, avec la primitive $\frac{x^{1-n}}{1-n}$ de x^{-n} et un crochet nul aux deux bornes, donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

5 Une fonction décroissante intégrable

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable.

1. Démontrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) < 0$. Par décroissance de f , on a $f(t) \leq f(x_0)$ pour tout $t \geq x_0$, donc pour $X \geq x_0$:

$$\int_{x_0}^X f(t) dt \leq \int_{x_0}^X f(x_0) dt = (X-x_0)f(x_0) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\infty$$

puisque $f(x_0) < 0$. Ceci contredit l'intégrabilité de f (qui impose à $\int_{x_0}^X f$ d'admettre une limite finie). Donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

La fonction f est décroissante et minorée par 0 (question précédente) : elle admet donc une limite finie $\ell \geq 0$ en $+\infty$.

Si $\ell > 0$, alors $f(t) \geq \ell$ pour tout t assez grand (disons $t \geq A$), donc $\int_A^X f(t) dt \geq \ell(X-A) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f . On en déduit $\ell = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. Justifier que $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Comme f est intégrable, F admet une limite finie en $+\infty$. Par la relation de Chasles :

$$\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{\frac{x}{2}} f(t) dt = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a aussi $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, donc $F(x)$ et $F\left(\frac{x}{2}\right)$ tendent tous deux vers la même limite : $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. En déduire que $xf(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Par décroissance de f , pour $t \in \left[\frac{x}{2}, x\right]$, on a $f(t) \geq f(x) \geq 0$ (positivité établie à la question 1), donc en intégrant sur cet intervalle de longueur $\frac{x}{2}$:

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(x) dt \leq \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$$

D'après la question 3, le membre de droite tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$: par théorème d'encadrement, $\frac{x}{2} f(x) \rightarrow 0$, donc $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

6 Valuation un

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est annulé par un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ pour lequel $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\text{Im } u$ est le noyau d'un polynôme en u et que $E = \text{Im } u \oplus \ker u$.

Comme $P(0) = 0$, X divise P : écrivons $P = XQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. En dérivant, $P' = Q + XQ'$, donc $Q(0) = P'(0) \neq 0$: le polynôme Q n'est pas divisible par X , et c'est ce qui va nous permettre de conclure. Écrivons encore $Q = Q(0) + XR$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$.

$\text{Im } u = \ker Q(u)$. Si $y = u(x) \in \text{Im } u$, alors, puisque les polynômes en u commutent et que $P = QX$:

$$Q(u)(y) = Q(u) \circ u(x) = P(u)(x) = 0$$

Réciproquement, soit $y \in \ker Q(u)$: de $Q(u) = Q(0) \text{Id} + u \circ R(u)$, on tire $Q(0)y + u(R(u)(y)) = 0$, soit :

$$y = u\left(-\frac{1}{Q(0)}R(u)(y)\right) \in \text{Im } u$$

D'où l'égalité $\text{Im } u = \ker Q(u)$.

Somme directe. Soit $y \in \text{Im } u \cap \ker u$. On a $u(y) = 0$ et $Q(u)(y) = 0$, donc :

$$Q(0)y = -u(R(u)(y)) = -R(u)(u(y)) = 0$$

Comme $Q(0) \neq 0$, il vient $y = 0$. Ainsi $\text{Im } u \cap \ker u = \{0\}$, et le théorème du rang, $\dim \text{Im } u + \dim \ker u = \dim E$, donne $E = \text{Im } u \oplus \ker u$.

L'hypothèse $P'(0) \neq 0$ est indispensable : un endomorphisme u non nul vérifiant $u^2 = 0$ est annulé par X^2 , et pourtant son image est contenue dans son noyau.

2. Montrer que dans une certaine base de E , u a pour matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où la matrice A est inversible.

Notons $r = \text{rg } u$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im } u$ et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\ker u$; d'après la question 1, la réunion $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , dite adaptée à la décomposition $E = \text{Im } u \oplus \ker u$.

Pour $j > r$, $u(e_j) = 0$: les $n-r$ dernières colonnes de $\text{Mat}_B(u)$ sont nulles. Pour $j \leq r$, $u(e_j) \in \text{Im } u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$: les r premières colonnes n'ont de coordonnées non nulles que sur les r premières lignes. La matrice est donc de la forme :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

et A est la matrice, dans $(e_1, \dots, e_r)$, de l'endomorphisme $\tilde{u}$ de $\text{Im } u$ induit par u . Cet endomorphisme est injectif, son noyau étant $\text{Im } u \cap \ker u = \{0\}$, donc bijectif en dimension finie : A est inversible. On peut aussi le lire sur le rang, $\text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg } A$ devant valoir r .

Remarque

L'hypothèse revient à dire que 0 est racine simple de P . On aurait aussi pu utiliser le lemme des noyaux pour la question précédente : X et Q étant premiers entre eux, on a $E = \ker P(u) = \ker u \oplus \ker Q(u)$. Les projecteurs, annulés par $X^2 - X = X(X-1)$, en sont l'exemple le plus simple, avec $A = I_r$.

7 Projecteurs qui commutent

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que pq est la projection de E sur $\text{Im } p \cap \text{Im } q$ de direction $\ker p + \ker q$.

pq est un projecteur. Grâce à la commutation, il vient :

$$(pq)^2 = pqpq = ppqq = p^2q^2 = pq$$

Image. Pour tout x , $pq(x) = p(q(x)) \in \text{Im } p$, et $pq(x) = q(p(x)) \in \text{Im } q$: donc $\text{Im}(pq) \subseteq \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Réciproquement, si $y \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $p(y) = y$ et $q(y) = y$, un projecteur fixant les vecteurs de son image, donc $pq(y) = p(y) = y$ et $y \in \text{Im}(pq)$. Ainsi $\text{Im}(pq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Noyau. Si $x \in \ker q$, alors $pq(x) = p(0) = 0$; si $x \in \ker p$, alors $pq(x) = qp(x) = 0$. Le noyau de pq étant un sous-espace, $\ker p + \ker q \subseteq \ker(pq)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(pq)$. On décompose x selon le projecteur q :

$$x = q(x) + (x - q(x))$$

Le second terme est dans $\ker q$, puisque $q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x) = 0$. Le premier est dans $\ker p$, puisque $p(q(x)) = pq(x) = 0$. Donc $x \in \ker p + \ker q$, et $\ker(pq) = \ker p + \ker q$.

Le projecteur pq a pour image $\text{Im } p \cap \text{Im } q$ et pour noyau $\ker p + \ker q$: c'est la projection annoncée, et l'on obtient au passage $E = (\text{Im } p \cap \text{Im } q) \oplus (\ker p + \ker q)$.

⚠ Attention

Attention, l'hypothèse de commutation est indispensable. Dans $\mathbb{K}^2$, prenons par exemple p la projection sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_2)$ et q la projection sur $\text{Vect}(e_1 + e_2)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1)$, de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors pq a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est non nulle et de carré nul : pq n'est donc pas un projecteur.

8 Translatées

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie l en $-\infty$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ existe.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'objectif est de montrer que l'intégrale suivante existe, et d'en déterminer la valeur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx$$

On notera $g : x \mapsto f(a+x) - f(b+x)$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} g$ converge et calculer sa valeur.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux translatées de f , qui est continue : il n'y a donc de problème qu'aux deux bornes infinies. En $+\infty$, on va se ramener à l'hypothèse sur f par un changement de variable.

Soit $M > 0$. Effectuons le changement de variable affine $t = a + x$ dans la première intégrale et $t = b + x$ dans la seconde, ce qui translate simplement les bornes :

$$\int_0^M g(x) dx = \int_a^{a+M} f(t) dt - \int_b^{b+M} f(t) dt$$

L'hypothèse assure la convergence de $\int_0^{+\infty} f$; comme $\int_0^a f$ et $\int_0^b f$ sont des intégrales de fonction continue sur un segment, donc finies, les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ convergent également. Chacun des deux termes admet donc une limite finie lorsque M tend vers $+\infty$:

$$\int_0^M g(x) dx \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f - \int_b^{+\infty} f$$

La relation de Chasles $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$ permet enfin de simplifier cette différence :

$$\int_0^{+\infty} g = \int_a^b f(t) dt$$

L'intégrale converge donc en $+\infty$, et sa valeur ne dépend que des valeurs de f sur le segment $[a, b]$.

2. Montrer que $\int_{-\infty}^0 g$ converge et calculer sa valeur en fonction de l .

C'est ici que se trouve la difficulté : lorsque $l \neq 0$, aucune des deux intégrales $\int_{-\infty}^0 f(a+x) dx$ et $\int_{-\infty}^0 f(b+x) dx$ ne converge, puisque l'intégrande tend alors vers une constante non nulle. Seule leur différence converge.

Soit $M > 0$. Les mêmes changements de variable que précédemment donnent :

$$\int_{-M}^0 g(x) dx = \int_{a-M}^a f(t) dt - \int_{b-M}^b f(t) dt$$

L'idée est de faire apparaître, par la relation de Chasles, une partie commune aux deux intégrales qui se simplifiera. Découpons chacune d'elles au point $b - M$ pour la première et au point a pour la seconde :

$$\begin{aligned} \int_{a-M}^a f &= \int_{a-M}^{b-M} f + \int_{b-M}^a f \\ \int_{b-M}^b f &= \int_{b-M}^a f + \int_a^b f \end{aligned}$$

En soustrayant, le terme $\int_{b-M}^a f$ disparaît et il reste :

$$\int_{-M}^0 g(x) dx = \int_{a-M}^{b-M} f(t) dt - \int_a^b f(t) dt$$

Le second terme est une constante. Tout revient donc à étudier $\int_{a-M}^{b-M} f$, intégrale sur un intervalle de longueur fixe $b - a$ qui glisse vers $-\infty$. Comme f y est proche de l , on s'attend à ce qu'elle tende vers $l(b - a)$. Écrivons la différence :

$$\int_{a-M}^{b-M} f(t) dt - l(b - a) = \int_{a-M}^{b-M} (f(t) - l) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f tend vers l en $-\infty$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t) - l| \leq \varepsilon$ dès que $t \leq T$. Pour M assez grand, tout l'intervalle d'extrémités $a - M$ et $b - M$ est contenu dans $]-\infty, T]$, et l'on obtient la majoration :

$$\left| \int_{a-M}^{b-M} (f(t) - l) dt \right| \leq |b-a| \varepsilon$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\int_{a-M}^{b-M} f$ tend vers $l(b-a)$, puis :

$$\int_{-\infty}^0 g = l(b-a) - \int_a^b f(t) dt$$

⚠ Attention

Attention, on ne peut pas écrire $\int_{-\infty}^0 g = \int_{-\infty}^0 f(a+x) dx - \int_{-\infty}^0 f(b+x) dx$ puis traiter chaque morceau séparément, puisque ces deux intégrales divergent dès que $l \neq 0$. On travaille donc sur des bornes finies, on simplifie avec la relation de Chasles, et c'est seulement ensuite que l'on passe à la limite.

3. Conclure.

Les deux questions précédentes établissent la convergence de $\int_0^{+\infty} g$ et de $\int_{-\infty}^0 g$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge donc, et vaut la somme des deux :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g = \left(l(b-a) - \int_a^b f \right) + \int_a^b f = l(b-a)$$

On obtient finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx = l(b-a)$$

Remarque

On remarque que les termes $\int_a^b f$ obtenus en $+\infty$ et en $-\infty$ se compensent : le résultat ne dépend que de la limite l , et l'hypothèse sur $\int_0^{+\infty} f$ ne sert qu'à assurer la convergence.

En particulier pour $b = a + 1$ on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(a+1+x)) dx = l$. Le résultat est à rapprocher des intégrales de Frullani, où l'on intègre cette fois $\frac{f(ax) - f(bx)}{x}$, c'est-à-dire une différence de deux dilatées et non de deux translatées.