

Corrigé de la colle n° 3

Bonjour à Irène.

Exercices

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ est impropre en 0 et en $+\infty$, elle converge donc si $\int_0^1 x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ et $\int_1^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ convergent.

$$\text{or } 1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}})) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o(\frac{1}{\sqrt{x}}) \text{ car } \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc $x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\alpha - \frac{1}{2}}$ qui ne change pas de signe.

donc les intégrales $\int_1^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ et $\int_1^{+\infty} x^{\alpha - \frac{1}{2}} dx$ sont de la même nature.

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{\alpha - \frac{1}{2}} dx$ converge si $\alpha < -\frac{1}{2}$ d'après le critère de Riemann en $+\infty$

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$

et $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^\alpha$, or l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha dx$ converge si $\alpha > -1$

les intégrales étant de même nature, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ converge si $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

Exercice 2

1. Les fonctions $f: t \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})$ et $h: t \mapsto \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})$ sont continues sur $[0, 1]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. On pose donc F une primitive de f et H une primitive de h sur $[0, 1]$.

Sol $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi $G(x) = F(\sin^2(x)) - F(0) + H(\cos^2(x)) - H(0)$

La fonction G est donc dérivable et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $G'(x) = 2\sin(x)\cos(x)f(\sin^2(x)) - 2\sin(x)\cos(x)h(\cos^2(x))$

$$\text{donc } G'(x) = 2\cos(x)\sin(x) \left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{\sin^2(x)}) - \operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2(x)}) \right)$$

$$= 2\cos(x)\sin(x) \left(\operatorname{Arctan}(\sin(x)) - \operatorname{Arccos}(\cos(x)) \right) \quad \begin{cases} \sin(x) \geq 0 \\ \cos(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= 2\cos(x)\sin(x) (x - x)$$

$$= 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Arctan}(\sin x) = x \quad \text{car } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \operatorname{Arccos}(\cos x) = x \quad \text{car } x \in [0, \pi] \end{array} \right.$$

α

Donc la fonction G est constante sur $[0, \pi/2]$

2. On pose le changement de variable $u = \sin(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $[0, \pi/2]$.

$$\text{donc } du = \cos(x) dx \quad \text{donc} \quad \int_0^1 u \operatorname{Arctan}(u) du = \int_0^{\pi/2} \sin(x) x \cos(x) dx$$

les fonctions $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto \frac{1}{2} \sin^2(x)$ sont de classe E^1 sur $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \int_0^{\pi/2} x \sin(x) \cos(x) dx &= \int_0^{\pi/2} y(x) g'(x) dx \\ &= [f(x)g(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)g(x) dx \quad \text{par intégration par parties} \\ &= \left[\frac{1}{2} x \sin^2(x) \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_0^1 u \operatorname{Arccin}(u) du = \frac{\pi}{8}}$$

$$\text{or } G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \operatorname{Arccin}(\sqrt{t}) dt$$

on pose le changement de variable $u = \sqrt{t}$ qui est de classe E^1 sur $[0, 1]$ et strictement croissant.

$$\text{donc } \int_0^1 \operatorname{Arccin}(\sqrt{t}) dt = 2 \int_0^1 u \operatorname{Arccin}(u) du \quad \text{car les intégrales convergent.}$$

$$\text{donc } \int_0^1 \operatorname{Arccin}(\sqrt{t}) dt = \frac{\pi}{4} = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], G(x) = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3
 $\forall P \in \mathbb{R}[X],$

$$u^2(P) = u(u(P)) = u\left(A(X) \int_0^1 P(t) dt - P(X) \int_0^1 A(t) dt\right)$$

$$= A(X) \int_0^1 \left(A(t) \int_0^1 P(u) du - P(t) \int_0^1 A(u) du \right) dt - \left(A(X) \int_0^1 P(u) du - P(X) \int_0^1 A(u) du \right) \int_0^1 A(t) dt$$

$$= A(X) \left(\int_0^1 P(u) du \int_0^1 A(t) dt - \int_0^1 P(t) dt \int_0^1 A(u) du \right) - \int_0^1 A(t) dt u(P)$$

$$\text{donc } u^2(P) = - \int_0^1 A(t) dt \times u(P)$$

$$\text{donc } \int_0^1 A(t) dt \times u(P) + u^2(P) = 0_P$$

donc le polynôme $X^2 \int_0^1 A(t) dt + X$ est annulateur de u oui

$$\forall P \in E, u(P) = 0_P \iff A(X) \int_0^1 P(t) dt = P(X) \int_0^1 A(t) dt$$

$$\iff P(X) = \frac{\int_0^1 P(t) dt}{\int_0^1 A(t) dt} A(X) \quad \text{car } a \neq 0$$

$$\Rightarrow P(X) \in \text{Vect}(A(X)). \quad \text{Réciproquement: } P \in \text{Vect}(A) \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow u(P) = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Ker}(u) = \text{Vect}(A)}$$

Soit $Q \in \text{Im}(u)$. Il existe alors $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = u(P)$.

$$\text{d'où } Q(X) = A(X) \int_0^1 P(t) dt - P(X) \int_0^1 A(t) dt$$

$$\text{Donc } \int_0^1 Q(x) dx = \int_0^1 A(x) dx \int_0^1 P(t) dt - \int_0^1 P(x) dx \int_0^1 A(t) dt = 0.$$

Or $\int_0^1 1 dt \neq 0$, d'où $1 \notin \text{Im}(u)$.

Donc l'endomorphisme u n'est pas surjectif.

Exercice 4

1. Soit $x \geq 0$

l'intégrale $F(x)$ est impropre en $+\infty$.

$$\forall t \geq 0, \frac{1}{1+x^3+t^3} = \frac{1}{t^3} \times \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1+x^3}{t^3}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0}} \sim \frac{1}{t^3} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Donc les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ et $F(x)$ sont de même nature.

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

Donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $t \geq 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$ tel que $x \leq y$

$x \leq y$ donc $1+x^3+t^3 \leq 1+y^3+t^3$

$$\text{d'où } \frac{1}{1+x^3+t^3} \geq \frac{1}{1+y^3+t^3}$$

car la fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

par croissance de l'intégrale, on a donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^3+t^3}$

$$\text{ie } f(x) \geq f(y)$$

donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$ est impropre en $+\infty$.

$$\text{or } \forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \text{ qui change peu de signe}$$

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1}$ converge.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{\frac{4}{9} + (t - \frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{9}{4}}{1 + (\frac{3}{2}(t - \frac{1}{3}))^2} = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{1 + (\frac{\sqrt{4}{3}}{2}(t - \frac{1}{3}))^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + (\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + (\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

4. $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$

On pose le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

donc $dt = -\frac{du}{u^2}$

$$\text{d'où } F(0) = \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{du}{u^2}}{1 + \frac{1}{u^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1 + u^3}$$

$$\text{d'où } F(0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} + \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^3} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$$

$$\text{or } (1+t)(t^2+t+1) = t^3 + t^2 + t + t^2 + t + 1 = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

donc $\frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{t^2+t+1}$

d'où $F(0) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1} dt$

et donc d'après la question 3,

$$F(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

5. On pose le changement de variables $t = xu$ qui est de classe C^1 et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{donc } \forall x \geq 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \, du}{1+x^2+(xu)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x \, du}{1+x^2(1+u^2)} = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{D'où} \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}}_{= F(0)}, \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

Donc, d'après le théor. des gendarmes,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$