Colle 04 Intégrales généralises

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1. On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.

1. Montrer que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
2. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution **1.**

1. ***Intégrabilité de f et f'***

   — ***Intégrabilité de f :*** *Par hypothèse,* $\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = a < 0$. *Soit* $a_0 \in]a, 0[$. *Il existe* $A > 0$ *tel que pour tout* $t \geq A$, $\frac{f'(t)}{f(t)} \leq a_0$. *En intégrant cette inégalité entre* A *et* x *(*$x \geq A$*) :*

   $$\int_A^x \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \leq \int_A^x a_0 \mathrm{d}t \implies \ln(f(x)) - \ln(f(A)) \leq a_0(x - A)$$

   $$\ln(f(x)) \leq \ln(f(A)) - a_0 A + a_0 x$$

   En passant à l'exponentielle, on obtient pour $x \geq A$ *:*

   $$0 < f(x) \leq K e^{a_0 x} \quad \text{avec } K = f(A)e^{-a_0 A} > 0$$

   Comme $a_0 < 0$, *la fonction* $x \mapsto e^{a_0 x}$ *est intégrable sur* $[A, +\infty[$. *Par théorème de comparaison,* f *est intégrable sur* $[A, +\infty[$, *donc sur* $\mathbb{R}^+$.

   — ***Intégrabilité de f' :*** *On sait que* $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} af(t)$. *Puisque* f *est intégrable et positive au voisinage de* $+\infty$, f' *est intégrable par comparaison (elles sont de signe constant négatif au voisinage de l'infini car* $a < 0$ *et* $f > 0$*).*

2. ***Équivalent de*** $\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *On utilise la relation* $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} af(t)$. *Comme les fonctions* f' *et* af *sont intégrables sur* $\mathbb{R}^+$ *et gardent un signe constant (négatif) au voisinage de* $+\infty$, *on peut intégrer cet équivalent :*

   $$\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} af(t)\mathrm{d}t$$

   Le membre de gauche se calcule explicitement :

   $$\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_x^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(x) = 0 - f(x) = -f(x)$$

   (La limite est nulle car f *est intégrable et admet une limite en* $+\infty$, *cette limite ne peut être que 0). On obtient donc :*

   $$-f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

   D'où l'équivalent cherché :

   $$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{a}f(x)$$

XXX

Exercice 2. Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n et J_n sont bien définies. Montrer que (I_n) est constante.
2. Montrer que $I_n - J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Solution **2.**

1. $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ *et* $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ *est continue sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\mathcal{I}_n$ *est bien définie.*
   $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ *et* $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$ *est continue sur* $]0, \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\mathcal{J}_n$ *est bien définie.*
   $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cos(2(n+1)t)\sin(t)}{\sin(t)} dt$ $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos(2(n+1)t)dt = \left[\frac{2}{2(n+1)} sin(2(n+1)t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, *donc* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

2. $\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) dt.$
   Or $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t - \sin t}{t \sin t} \sim_0 \dfrac{t}{6}$ *se prolonge par continuité en* 0 *en posant* $f(0 = 0$. *Pour* $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-x^2 \cos x - (1 - \cos 2x)/2}{x^2 \sin^2 x}$$

   qui vers $\dfrac{1}{6}$ *en* 0. *Donc* f *est d eclasse* $\mathcal{C}^1$.
   On fait une intégration par partie dans l'intégrale définissant $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n$ *en dérivant* f *et en intégrant* $\sin(2n+1)t$ *:*

$$\mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = \left[f(t) \frac{-\cos(2n+1)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(2n+1)\, dt$$

   La dernière intégrale est bornée indépendamment de n. *On en déduit*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{I}_n - \mathcal{J}_n = 0.$$

   Il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{J}_n = \dfrac{\pi}{2}$

3. $\forall x, y > 0, x < y$, $\displaystyle\int_x^y \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - cos(t)}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1 - cos(t)}{t^2} dt$ *Or* $\dfrac{1 - cos(t)}{t} \sim_0 \dfrac{t}{2}$ *d'où* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - cos(t)}{t} = 0$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1 - cos(t)}{t} = 0$ *De plus,* $\dfrac{1 - cos(t)}{t^2} \sim_0 \dfrac{1}{2}$ *et* $\left|\dfrac{1 - cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, *donc* $t \mapsto \dfrac{1 - cos(t)}{t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *et par intégration par partie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - cos(t)}{t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}$$

   On pose le changement de variable $u = (2n+1)t$ *:*
   $\mathcal{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du$, *donc :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{J}_n = \frac{\pi}{2}$$

XXX

Exercice 3. On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer l'existence de I et de J et montrer que $J = I$.
2. Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$.
3. En considérant $I + J$ donner la valeur de I.

Exercice 4.
Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : [a,b] \to E$ continue. On suppose que

$$\int_a^b \|f(t)\|dt = \left\|\int_a^b f(t)dt\right\|.$$

On note u le vecteur unitaire de E défini par

$$u = \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}{\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|dt}.$$

Pour tout $t \in [a,b]$, on décompose $f(t)$ dans la somme directe $\mathbb{R}u \oplus^{\perp} (\mathbb{R}u)^{\perp}$ sous la forme $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$.

1. Démontrer que α et v sont continues sur $[a,b]$.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b v(t)dt$ est orthogonal à u.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b \alpha(t)dt = \int_a^b \|f(t)\|dt$.
4. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha(t) \leq \|f(t)\|$.
5. En déduire que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\|u$.
6. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que E est euclidien ?

Solution **3.**

1. *- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.*
   - Au voisinage de $+\infty, 0 \leqslant \frac{1}{t^3+1} \leqslant \frac{1}{t^3}$.
   - La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, car $3>1$.
   Donc $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, d'où l'existence de I.
   De même, on montre l'existence de l'intégrale J en comparant l'intégrande à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.
   Dans l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$, on pose $t = \frac{1}{x}$ (changement bijectif décroissant de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$sur$]0,+\infty[$.
   On obtient $\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et :

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1/x)^3+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

   La variable étant muette, on obtient $I = J$.

2. *Utilisons la forme canonique du trinôme : $u^2-u+1 = \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.*

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \int_{-1/2}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}[\arctan(x)]_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

   Finalement, $A = \sqrt{3}\frac{4\pi}{9}$.

3. *D'une part, $I = J$, donc $I+J = 2I$. D'autre part :*

$$I+J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.$$

   Finalement : $I = J = \frac{1}{2}A = \sqrt{3}\frac{2\pi}{9}$.

Solution **4.**
On sait que $\alpha(t) = \langle f(t), u\rangle$, et donc α est continue. Par différence, v est continue.
Par linéarité de l'intégrale,

$$\langle u, \int_a^b v(t)dt\rangle = \int_a^b \langle u, v(t)\rangle dt = \int_a^b 0dt = 0$$

. On a d'une part

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^v \alpha(t)dtu + \int_a^b v(t)dt$$

et d'autre part

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\|dtu.$$

Le produit scalaire par u donne $\int_a^b \alpha(t)dt = \int_a^b \|f(t)\|dt$.
Par le théorème de Pythagore, on sait que

$$\|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2$$

ce qui donne le résultat. Posons $g(t) = \|f(t)\| - \alpha(t)$. Alors g est une fonction continue sur $[a,b]$, positive et d'intégrale nulle. On en déduit que, pour tout $t \in [a,b]$, $g(t) = 0$ ou encore que $\alpha(t) = \|f(t)\|$, ce qui est exactement le résultat voulu.
Non, un contre-exemple est donnée par $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\ \|_\infty$, avec $f(t) = (t,1)$ pour $t \in [0,1]$.

XXX

Exercice 5. Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0\left(\left[1, +\infty\right[, \mathbb{R}_+^*\right)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. On pose $S(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2, +\infty[$.

Solution **5.**

1) On commence par quelques propriétés importantes de R.
Pour tout $x > 0$, $R(x) = \int_1^{+\infty} f(t)dt - \int_1^x f(t)dt$, *ce qui permet de montrer que* R *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, +\infty\ [$, *de dérivée* $-f$ *et que* $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$. *De plus,* R *est strictement positive sur* $[1, +\infty[$ *et* f *est également positive, donc* $g : x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ *est de signe fixe et l'étude de l'intégrabilité équivaut à l'existence d'une limite finie pour* $x \mapsto \int_1^x g(t)dt$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$. *Soit* $X > 1$, *comme* $R' = -f$, *on obtient*

$$\int_1^X \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}dx = \begin{cases} \left[-\frac{R(x)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right]_1^X & si\ \alpha \neq 1 \\ [-\ln(R(x))]_1^X & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$, *l'intégrale considérée admet une limite finie lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *si et seulement si* $1 - \alpha > 0$ *c'est-à-dire* $\alpha < 1$. *Finalement* $x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.

2) La fonction S *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, +\infty[$, *de dérivée* f, *nulle en 0 , strictement positive sur* $]1, +\infty[$, *ce qui justifie l'existence et la continuité de* $g_\alpha : x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ *sur* $[2, +\infty\ [$, *et de limite infinie en* $+\infty$. *Une primitive de* g_α *sur* $[2, +\infty\ [$ *est* $\frac{1}{(1-\alpha)S^{\alpha-1}}$ *si* $\alpha \neq 1$ *et* $\ln S$ *si* $\alpha = 1$. *Comme dans la première question, on montre que* g_α *est intégrable sur* $[2, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.