1 Intégrale bêta

Soient $a < b$ deux réels, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n \, dt$ et calculer sa valeur en cas de convergence.

Convergence. La fonction $\varphi : t \mapsto (b-t)^\alpha (t-a)^n$ est continue et positive sur $[a, b[$, et seule la borne b est à étudier. Comme $(t-a)^n$ tend vers $(b-a)^n \neq 0$ lorsque t tend vers b, on a :

$$\varphi(t) \underset{t \to b}{\sim} (b-a)^n (b-t)^\alpha$$

Par comparaison de fonctions positives, $I_n(\alpha)$ a donc la même nature que $\displaystyle\int_a^b (b-t)^\alpha \, dt$, qui converge si et seulement si $\alpha > -1$ d'après le critère de Riemann en b. Ainsi $I_n(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > -1$, ce que l'on suppose désormais.

Relation de récurrence. Pour calculer $I_n(\alpha)$, on cherche à faire descendre l'exposant n jusqu'à 0, où le calcul est immédiat. On intègre donc par parties en dérivant $(t-a)^n$, dont l'exposant baisse, et en primitivant $(b-t)^\alpha$, dont l'exposant monte : l'intégrale obtenue converge encore, puisque $\alpha + 1 > -1$.

Soit $n \geq 1$. Pour ne pas avoir à manipuler de crochet en b, on se place sur un segment $[a, x]$, avec $a < x < b$, sur lequel les fonctions $t \mapsto (t-a)^n$ et $t \mapsto -\dfrac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient :

$$\int_a^x (b-t)^\alpha (t-a)^n \, dt = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}(t-a)^n}{\alpha+1} \right]_a^x + \frac{n}{\alpha+1} \int_a^x (b-t)^{\alpha+1} (t-a)^{n-1} \, dt$$

Le crochet est nul en a puisque $n \geq 1$, et sa valeur en x tend vers 0 lorsque x tend vers b, puisque $\alpha + 1 > 0$. Les deux intégrales convergeant d'après l'étude précédente, le passage à la limite donne :

$$I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}(\alpha+1)$$

Calcul. Pour $n = 0$, le calcul est direct : pour tout $\beta > -1$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{(b-t)^{\beta+1}}{\beta+1}$ est une primitive de $t \mapsto (b-t)^\beta$ qui tend vers 0 en b, d'où :

$$I_0(\beta) = \int_a^b (b-t)^\beta \, dt = \left[-\frac{(b-t)^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_a^b = \frac{(b-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$$

En itérant la relation, chaque étape fait sortir un facteur et augmente de 1 l'exposant de $(b-t)$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \frac{n}{\alpha+1} \times \frac{n-1}{\alpha+2} \times \cdots \times \frac{1}{\alpha+n} \times I_0(\alpha+n) \\ &= \frac{n!\,(b-a)^{\alpha+n+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)} \end{aligned}$$

Pour le rédiger proprement, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que cette formule est vraie pour tout $\alpha > -1$. Elle l'est pour $n = 0$ d'après le calcul de I_0. Supposons-la vraie au rang $n-1$ pour un certain $n \geq 1$, et soit $\alpha > -1$. Comme $\alpha + 1 > -1$, on peut l'appliquer à $I_{n-1}(\alpha+1)$, et la relation de récurrence donne :

$$I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha+1} \times \frac{(n-1)!\,(b-a)^{\alpha+n+1}}{(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)} = \frac{n!\,(b-a)^{\alpha+n+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)}$$

d'où le résultat.

⚠ Attention

Attention, l'hypothèse de récurrence doit porter sur tous les exposants à la fois, et pas seulement sur α : la relation exprime $I_n(\alpha)$ à l'aide de $I_{n-1}(\alpha+1)$, et non de $I_{n-1}(\alpha)$.

Remarque

On aurait aussi pu commencer par le changement de variable affine $t = a + (b-a)s$, qui ramène à $[0,1]$ et fait sortir d'emblée la puissance de $b-a$:

$$I_n(\alpha) = (b-a)^{\alpha+n+1} \int_0^1 (1-s)^\alpha s^n \, ds$$

Pour la culture, cette dernière intégrale est la fonction Bêta d'Euler, qui s'exprime à l'aide de la fonction Gamma : elle vaut $\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+2)}$.

---

2 Intégrale logarithmique

1. Montrer que, pour $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,dt$ converge.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$, et l'on étudie les deux bornes séparément, en coupant par exemple en 1.

En 0. Comme $a^2+t^2 \geq a^2$, on a pour tout $t > 0$:

$$|f(t)| \leq \frac{|\ln(t)|}{a^2}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge (intégrale de référence), et ln garde un signe constant sur $]0,1]$: la fonction $|\ln|$ est donc intégrable sur $]0,1]$, et f aussi par comparaison.

En $+\infty$. Le dénominateur se comporte comme t^2, mais on ne peut pas comparer f à $\dfrac{1}{t^2}$, puisque $t^2 f(t)$ tend vers $+\infty$ à cause du logarithme. On compare donc f à $\dfrac{1}{t^\beta}$ avec un exposant β strictement compris entre 1 et 2, par exemple $\beta = \frac{3}{2}$: le facteur $\sqrt{t}$ qui reste au dénominateur suffit à absorber le logarithme, par croissances comparées :

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \times \frac{t^2}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge (critère de Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et que f est positive sur $[1,+\infty[$, l'intégrale converge en $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,dt$ converge donc, et même absolument.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

On ne dispose pas de primitive simple de $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$: on cherche plutôt un changement de variable qui fasse réapparaître l'intégrale de départ. Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ est naturel ici, pour deux raisons. D'une part, il échange $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, sur lesquels le logarithme est de signes opposés, puisque $\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln(u)$. D'autre part, il ne modifie pas le reste de l'intégrande :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^2+1}$$

Notons I l'intégrale cherchée, qui converge d'après la question précédente avec $a = 1$. L'application $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même, et le changement de variable est donc licite directement sur l'intégrale généralisée :

$$\begin{aligned} I &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{u^2+1}\, du \\ &= -I \end{aligned}$$

On en déduit $2I = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt = 0$$

Remarque

On aurait aussi pu couper l'intégrale en 1 et n'effectuer le changement de variable que sur $]0,1]$. On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$$

Les deux moitiés se compensent exactement. Pour la culture, la première vaut $-G$, où $G = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ est la constante de Catalan.

On remarque aussi que seule a servi l'invariance de $\frac{dt}{1+t^2}$ par $t \mapsto \frac{1}{t}$. Le même calcul montre par exemple que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+bt+1}\, dt = 0$ pour tout réel $b > -2$, la condition sur b garantissant que le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\, dt$.

Il s'agit de se ramener à la question précédente en faisant apparaître $1+u^2$ au dénominateur, ce que fait le changement de variable $t = au$. L'application $u \mapsto au$ étant une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2(1+u^2)}\, a\, du = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)+\ln(u)}{1+u^2}\, du$$

Pour séparer cette intégrale en deux, il faut que les deux morceaux convergent. C'est le cas ici, la première intégrale se calculant directement et la seconde étant nulle d'après la question 2 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \Big[\arctan(u)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\, du = 0$$

Par linéarité, on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\, dt = \frac{\ln(a)}{a} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a} \times 0 = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$$

On retrouve bien une intégrale nulle pour $a = 1$.

---

3 Composées dans les deux sens

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

Il s'agit de fabriquer un vecteur propre de $v \circ u$ à partir d'un vecteur propre x de $u \circ v$. En appliquant v à l'égalité $u(v(x)) = \lambda x$, on voit apparaître $v \circ u$ appliqué au vecteur $v(x)$, qui est donc le candidat naturel.

Soit donc $x \neq 0$ tel que $(u \circ v)(x) = \lambda x$, et posons $y = v(x)$. On a :

$$(v \circ u)(y) = v(u(v(x))) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda y$$

Il reste à vérifier que y n'est pas nul, ce qui utilise l'hypothèse $\lambda \neq 0$. En effet, si l'on avait $y = 0$, on aurait $\lambda x = u(y) = 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi y est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ, d'où le résultat.

Les rôles de u et v étant symétriques, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont donc les mêmes valeurs propres non nulles.

2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les endomorphismes $u : P \mapsto \int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$. Déterminer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

Pour $\lambda = 0$, la démonstration précédente ne fonctionne plus, puisque $v(x)$ peut être nul. Cet exemple montre que le résultat lui-même tombe.

Par définition, $u(P)$ est la primitive de P qui s'annule en 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a donc :

$$(u \circ v)(P) = \int_1^X P' = P - P(1) \qquad \text{et} \qquad (v \circ u)(P) = \left(\int_1^X P\right)' = P$$

Ainsi $(u \circ v)(P) = 0$ si et seulement si $P = P(1)$, c'est-à-dire si et seulement si P est constant, tandis que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Le noyau de $u \circ v$ est donc l'ensemble des polynômes constants, et $\ker(v \circ u) = \{0\}$.

Le réel 0 est valeur propre de $u \circ v$, de vecteur propre le polynôme constant 1, mais pas de $v \circ u$: le résultat de la question 1 est faux pour $\lambda = 0$.

Remarque

On remarque que $v \circ u$ est injective alors que $u \circ v$ ne l'est pas. C'est impossible en dimension finie : si $v \circ u$ est injective, elle est bijective, donc u est injective et v surjective, ce qui fait de u et de v des bijections, et de $u \circ v$ aussi. Ce raisonnement fournit d'ailleurs une démonstration de la question suivante sans déterminant.

3. On suppose E de dimension finie. Démontrer que le résultat de la question 1 reste vrai pour $\lambda = 0$.

En dimension finie, un endomorphisme w admet 0 pour valeur propre si et seulement s'il n'est pas injectif, c'est-à-dire s'il n'est pas bijectif, ou encore si $\det(w) = 0$. Or le déterminant d'une composée est le produit des déterminants :

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(v \circ u)$$

Ainsi 0 est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement s'il l'est de $v \circ u$. Avec la question 1, on conclut qu'en dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont exactement le même spectre.

Remarque

On remarque que la démonstration de la question 1 donne un peu plus : pour $\lambda \neq 0$, l'endomorphisme v envoie $E_\lambda(u \circ v)$ dans $E_\lambda(v \circ u)$, et de façon injective, puisque $v(x) = 0$ entraîne $\lambda x = 0$. Par symétrie, les sous-espaces propres associés à une même valeur propre non nulle ont donc la même dimension. Pour la culture, on peut même montrer qu'en dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont le même polynôme caractéristique.

---

4 Une base envoyée sur un vecteur

Soit $n \geq 1$, E un espace vectoriel de dimension n, de base $(e_1, \dots, e_n)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné. On note $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ et $s = \sum_{i=1}^n v_i$.

1. Donner le rang de f.

L'image de f est engendrée par les images des vecteurs d'une base de E :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \operatorname{Vect}(v)$$

Ainsi $\operatorname{rg} f = 0$ si $v = 0$, et $\operatorname{rg} f = 1$ sinon.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? On discutera selon v.

On commence par écrire f explicitement. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, la linéarité de f donne :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$$

En particulier $f(v) = sv$. Si $v = 0$, f est l'endomorphisme nul, qui est diagonalisable, et l'on suppose désormais $v \neq 0$.

Le noyau de f est alors l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$, de dimension $n-1$: il ne manque qu'une direction pour obtenir une base de vecteurs propres. Pour savoir où la chercher, on remarque qu'un vecteur propre x associé à une valeur propre $\mu \neq 0$ vérifie $x = \frac{1}{\mu} f(x)$, et appartient donc à $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v)$. Le seul candidat est donc v, à un facteur près, et tout dépend de $f(v) = sv$.

Si $s \neq 0$, le vecteur v est propre, associé à la valeur propre s, et $v \notin H$ puisque $f(v) \neq 0$. L'hyperplan H et la droite $\operatorname{Vect}(v)$ sont donc supplémentaires, et une base de H complétée par v est une base de vecteurs propres de f. Ainsi f est diagonalisable, semblable à $\operatorname{diag}(0, \dots, 0, s)$.

Si $s = 0$, ce qui suppose $n \geq 2$, on a $f(v) = 0$, et d'après ce qui précède, f n'a aucune valeur propre non nulle. S'il était diagonalisable, il serait donc semblable à la matrice nulle, c'est-à-dire nul, ce qui n'est pas le cas puisque $v \neq 0$. Ainsi f n'est pas diagonalisable. On remarque d'ailleurs que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ dans ce cas, donc $f^2 = 0$: l'endomorphisme f est nilpotent et non nul.

Conclusion. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $v = 0$ ou $s \neq 0$.

Remarque

On remarque que $s = \operatorname{Tr} f$, puisque la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ a toutes ses colonnes égales à celle de v. Plus généralement, un endomorphisme de rang 1 s'écrit $x \mapsto \varphi(x)\, w$, avec φ une forme linéaire non nulle et $w \neq 0$, et le même raisonnement montre qu'il est diagonalisable si et seulement si sa trace, qui vaut $\varphi(w)$, est non nulle.

---

5 Sans polynôme caractéristique

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont la dernière ligne et la dernière colonne ne contiennent que des 1, tous les autres coefficients étant nuls. Diagonaliser A sans calculer son polynôme caractéristique.

La matrice A a beaucoup de coefficients nuls, et l'on peut espérer que son noyau soit gros. Il ne resterait alors que peu de valeurs propres à déterminer, et la trace de A et celle de A^2 peuvent suffire à les trouver.

Noyau. Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$, on a :

$$AX = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi $X \in \ker A$ si et seulement si $x_n = 0$ et $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$. Ces deux équations étant indépendantes, le noyau est de dimension $n-2$, et les vecteurs $e_1 - e_k$, pour $2 \leq k \leq n-1$, en forment une base. En particulier $\operatorname{rg} A = 2$.

Valeurs propres non nulles. Pour relier les valeurs propres de A à la trace de A^2, on trigonalise A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où son polynôme caractéristique est scindé : A est semblable à une matrice triangulaire T dont la diagonale porte les valeurs propres de A, répétées selon leur multiplicité. La dimension d'un sous-espace propre étant majorée par la

multiplicité de la valeur propre, au moins $n-2$ coefficients diagonaux de T sont nuls, et l'on note λ et μ les deux autres. La matrice T^2, semblable à A^2, est encore triangulaire, de diagonale formée des carrés de celle de T. En prenant les traces, il vient :

$$\lambda+\mu=\mathrm{Tr}(A)=1 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2+\mu^2=\mathrm{Tr}\left(A^2\right)=2n-1$$

En effet, comme A est symétrique, $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)=\mathrm{Tr}\left(A^\top A\right)$ est la somme des carrés des coefficients de A, c'est-à-dire le nombre de coefficients égaux à 1. On en déduit :

$$\lambda\mu=\frac{(\lambda+\mu)^2-\left(\lambda^2+\mu^2\right)}{2}=\frac{1-(2n-1)}{2}=1-n$$

Ainsi λ et μ sont les racines de $X^2-X-(n-1)$, dont le discriminant $4n-3$ est strictement positif :

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu=\frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$$

Ce sont deux valeurs propres réelles de A, distinctes, et non nulles puisque $\lambda\mu=1-n\neq 0$.

Vecteurs propres. Soit $\nu\in\{\lambda,\mu\}$. Un vecteur propre X associé à ν vérifie $X=\frac{1}{\nu}AX$, donc ses $n-1$ premières coordonnées sont égales, d'après l'expression de AX. On le cherche donc sous la forme $X=(1,\dots,1,t)^\top$:

$$AX=\nu X \iff \begin{cases} t=\nu \\ n-1+t=\nu t \end{cases} \iff \begin{cases} t=\nu \\ \nu^2-\nu-(n-1)=0 \end{cases}$$

La seconde condition est vérifiée par λ et par μ : les vecteurs $X_\lambda=(1,\dots,1,\lambda)^\top$ et $X_\mu=(1,\dots,1,\mu)^\top$ sont propres, associés respectivement à λ et à μ.

Conclusion. Les sous-espaces propres étant en somme directe, la famille formée de X_λ, de X_μ et des e_1-e_k pour $2\leq k\leq n-1$ est libre. Elle compte n vecteurs propres : c'est une base de vecteurs propres, et A est diagonalisable :

$$A=P\,\mathrm{diag}(\lambda,\mu,0,\dots,0)\,P^{-1}$$

où P a pour colonnes X_λ, X_μ, puis $e_1-e_2,\dots,e_1-e_{n-1}$. Pour $n=3$, on trouve les valeurs propres 2, -1 et 0. Pour $n=2$, la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ est celle de la récurrence de Fibonacci, et l'on retrouve le nombre d'or et son conjugué, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Remarque

On remarque que la recherche des vecteurs propres suffisait en fait à elle seule. Un vecteur propre associé à une valeur propre $\nu\neq 0$ a ses $n-1$ premières coordonnées égales, et non nulles sans quoi il serait nul : la condition $\nu^2-\nu-(n-1)=0$ donne alors directement les deux valeurs propres non nulles. La méthode des traces a l'avantage de s'appliquer à toute matrice de rang 2, même lorsque les vecteurs propres ne se devinent pas.

---

6 Même nature

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt\geq\frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x\geq 0$.

Comme f est continue et positive, F est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $f\geq 0$: elle est croissante, et positive puisque $F(0)=0$. L'idée est de minorer $F(t)$ par $F(x)$ sur $[x,+\infty[$, puis d'intégrer.

Soit $x\geq 0$. Pour tout $t\geq x$, la croissance de F donne :

$$\frac{F(t)}{(1+t)^2}\geq\frac{F(x)}{(1+t)^2}$$

Les deux membres sont intégrables sur $[x,+\infty[$, le premier par hypothèse, le second puisque $t\mapsto-\frac{1}{1+t}$ est une

primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On peut donc intégrer l'inégalité, et il vient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt \geq F(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = F(x)\left[-\frac{1}{1+t}\right]_x^{+\infty} = \frac{F(x)}{1+x}$$

Le terme $\frac{F(x)}{1+x}$ est celui qui apparaîtra entre crochets dans l'intégration par parties de la question suivante, et cette minoration servira à le contrôler.

2. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ sont de même nature, et comparer leurs valeurs.

Les deux intégrales font intervenir f et sa primitive F : pour passer de l'une à l'autre, on intègre par parties, en primitivant f et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{1+t}$. On se place sur un segment $[0,X]$, avec $X>0$, pour ne rien supposer sur la convergence. Les fonctions F et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ y sont de classe $\mathcal{C}^1$, et comme $F(0)=0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{f(t)}{1+t}\,dt &= \left[\frac{F(t)}{1+t}\right]_0^X + \int_0^X \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt \\ &= \frac{F(X)}{1+X} + \int_0^X \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt\end{aligned}$$

Les trois termes sont positifs, et tout repose sur le comportement du crochet $\frac{F(X)}{1+X}$ lorsque X tend vers $+\infty$. On rappelle aussi que l'intégrale d'une fonction positive converge si et seulement si ses intégrales partielles sont majorées.

Si $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,dt$ **converge**, notons J sa valeur. Le crochet étant positif, l'égalité précédente donne, pour tout $X>0$:

$$\int_0^X \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt \leq \int_0^X \frac{f(t)}{1+t}\,dt \leq J$$

la seconde inégalité venant de la positivité de f. Les intégrales partielles de la fonction positive $t \mapsto \frac{F(t)}{(1+t)^2}$ sont majorées, donc son intégrale sur $[0,+\infty[$ converge.

Si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$ **converge**, c'est la question 1 qui contrôle le crochet :

$$0 \leq \frac{F(X)}{1+X} \leq \int_X^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque le reste d'une intégrale convergente tend vers 0. Par encadrement, le crochet tend vers 0, et l'égalité obtenue par intégration par parties montre que les intégrales partielles de $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t}$ ont une limite finie, la même que celles de $t \mapsto \frac{F(t)}{(1+t)^2}$.

Conclusion. Les deux intégrales sont de même nature. Lorsqu'elles convergent, le second cas s'applique, et elles sont égales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,dt$$

Lorsqu'elles divergent, leurs intégrales partielles tendent toutes deux vers $+\infty$, puisque les fonctions sont positives.

Remarque

Par exemple, pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$, on a $F : t \mapsto \ln(1+t)$, et l'on obtient sans autre calcul :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = 1$$

7 Matrice stochastique

Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. On note $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1, de sorte qu'une matrice A à coefficients positifs est stochastique si et seulement si $AU = U$.

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est stochastique.

Les coefficients de AB sont positifs, comme sommes de produits de réels positifs : $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$. De plus, d'après la caractérisation donnée par l'énoncé :

$$(AB)U = A(BU) = AU = U$$

donc AB est stochastique. Par récurrence, en partant de $A^0 = I_n$, les puissances A^k d'une matrice stochastique A sont toutes stochastiques, ce qui servira à la dernière question.

2. Soit A une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A et que toutes les valeurs propres complexes de A ont un module majoré par 1.

L'égalité $AU = U$, avec $U \neq 0$, montre que 1 est valeur propre de A, de vecteur propre U.

Pour majorer le module d'une valeur propre, on écrit l'égalité $AX = \lambda X$ sur une ligne bien choisie : celle de la coordonnée de X de plus grand module, ce qui permet de majorer toutes les autres par celle-ci. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Choisissons un indice i tel que $|x_i|$ soit le plus grand des $|x_k|$, de sorte que $|x_i| > 0$ puisque $X \neq 0$. La i-ième ligne de $AX = \lambda X$ s'écrit $\lambda x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k$, et l'inégalité triangulaire donne, les $a_{i,k}$ étant positifs :

$$|\lambda|\,|x_i| \leq \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,|x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\right)|x_i| = |x_i|$$

En divisant par $|x_i| > 0$, on obtient $|\lambda| \leq 1$.

Remarque

Pour la culture, la même idée appliquée à une matrice $M = (m_{i,k})$ quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donne le théorème de Gershgorin : toute valeur propre de M appartient à l'un des disques de centre $m_{i,i}$ et de rayon $\sum_{k \neq i} |m_{i,k}|$.

3. Montrer que $\ker(A - I_n) = \ker\left((A - I_n)^2\right)$.

L'inclusion $\ker(A - I_n) \subset \ker\left((A - I_n)^2\right)$ est toujours vraie. Pour l'inclusion réciproque, on va voir que si $(A - I_n)X$ n'était pas nul, les vecteurs $A^k X$ grandiraient comme k, ce que la question 1 interdit : les puissances de A sont stochastiques, et ne peuvent pas faire grossir les coordonnées.

Soit $X \in \ker\left((A - I_n)^2\right)$, et posons $Y = (A - I_n)X$, de sorte que $(A - I_n)Y = 0$. Autrement dit :

$$AY = Y \qquad \text{et} \qquad AX = X + Y$$

En appliquant de nouveau A, on obtient $A^2X = AX + AY = X + 2Y$, et une récurrence immédiate donne $A^k X = X + kY$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notons c le plus grand des $|x_l|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout indice i, la matrice A^k étant stochastique, l'inégalité triangulaire donne :

$$\left|\left(A^k X\right)_i\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} \left(A^k\right)_{i,l} x_l\right| \leq \sum_{l=1}^{n} \left(A^k\right)_{i,l} |x_l| \leq c \sum_{l=1}^{n} \left(A^k\right)_{i,l} = c$$

Par conséquent, pour tout indice i et tout $k \geq 1$, on a $k\,|y_i| = \left|\left(A^k X\right)_i - x_i\right| \leq 2c$, soit $|y_i| \leq \frac{2c}{k}$. En faisant tendre k vers $+\infty$, il vient $y_i = 0$. Ainsi $Y = 0$, c'est-à-dire $X \in \ker(A - I_n)$, d'où l'égalité.

Remarque

On remarque que la condition sur la somme des lignes est indispensable : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est à coefficients positifs mais n'est pas stochastique, et l'on a $(A - I_2)^2 = 0$ alors que $A \neq I_2$. Ses puissances $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont d'ailleurs pas bornées.

---

8 Une équation aux valeurs propres

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(A_n)_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $(A_n)_{i,j} = j$ si $i \neq j$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \dots, -n\}$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$. Montrer que les entiers $-1, \dots, -n$ ne sont pas valeurs propres.

Hors de la diagonale, un coefficient de A_n ne dépend que de sa colonne. Pour $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$, la i-ième coordonnée de $A_n X$ est donc la somme $\sum_{j=1}^{n} j x_j$ privée de son terme d'indice i, et l'on introduit cette somme, commune à toutes les lignes :

$$S = \sum_{j=1}^{n} j x_j \qquad \text{de sorte que} \qquad (A_n X)_i = \sum_{j \neq i} j x_j = S - i x_i$$

L'égalité $A_n X = \lambda X$ équivaut alors au système :

$$(\lambda + i)\, x_i = S \qquad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!] \tag{$*$}$$

dans lequel chaque équation ne fait intervenir qu'une coordonnée de X, et S. Attention, S dépend elle-même de X : ce n'est pas un paramètre libre. Il s'agit maintenant de savoir si l'on peut diviser par $\lambda + i$, ce qui sépare les deux cas de l'énoncé.

Cas où $\lambda \notin \{-1, \dots, -n\}$. Aucun des $\lambda + i$ n'est nul, et $(*)$ s'écrit $x_i = \frac{S}{\lambda + i}$ pour tout i. En reportant ces expressions dans la définition de S, on obtient une condition de compatibilité :

$$S = \sum_{j=1}^{n} j \frac{S}{\lambda + j} = S \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k}$$

Supposons que λ soit valeur propre, et soit X un vecteur propre associé. Si S était nul, toutes les coordonnées $x_i = \frac{S}{\lambda + i}$ seraient nulles, ce qui est exclu. Donc $S \neq 0$, et l'on peut simplifier par S, ce qui donne $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

Réciproquement, supposons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$. L'analyse précédente indique où chercher un vecteur propre : on prend $S = 1$, c'est-à-dire $x_i = \frac{1}{\lambda + i}$ pour tout i. Ce vecteur X est non nul, et par hypothèse :

$$\sum_{j=1}^{n} j x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\lambda + j} = 1$$

On a donc bien $(\lambda + i)\, x_i = 1 = \sum_{j=1}^{n} j x_j$ pour tout i : le système $(*)$ est vérifié, et X est un vecteur propre de A_n associé à λ, d'où l'équivalence.

Cas où $\lambda = -k$, avec $k \in [\![1, n]\!]$. Soit X vérifiant $(*)$. L'équation d'indice k s'écrit $0 = S$. Les autres deviennent $(i - k)\, x_i = 0$ avec $i - k \neq 0$, donc $x_i = 0$ pour tout $i \neq k$. Enfin, $S = k x_k$ est nul, donc $x_k = 0$. Ainsi $X = 0$ est la seule solution, et $-k$ n'est pas valeur propre de A_n.

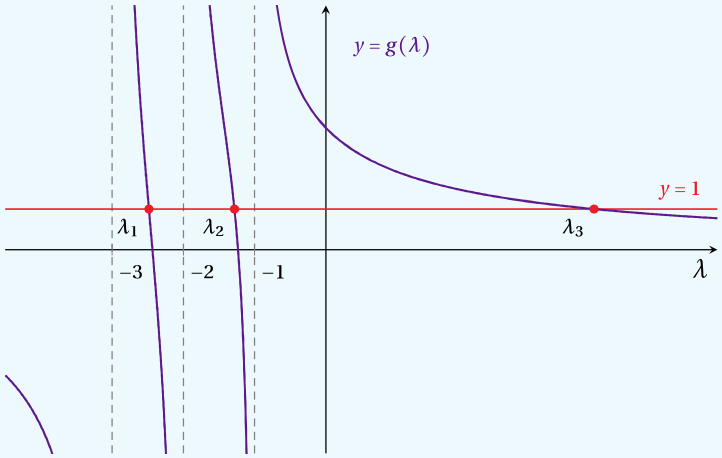
2. En déduire que A_n est diagonalisable.

D'après la question 1, les valeurs propres de A_n sont exactement les solutions de l'équation $g(\lambda) = 1$, où l'on a posé :

$$g : \lambda \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R} \setminus \{-1, \dots, -n\}$$

Une matrice de taille n qui possède n valeurs propres distinctes étant diagonalisable, il suffit de montrer que cette équation a n solutions. On les compte à l'aide des variations de g, intervalle par intervalle.

Chaque fonction $\lambda \mapsto \frac{k}{\lambda+k}$ a pour dérivée $\lambda \mapsto -\frac{k}{(\lambda+k)^2}$, qui est strictement négative. La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur chacun des $n+1$ intervalles qui composent son ensemble de définition, et il reste à étudier ses limites aux bornes. Près de $-k$, seul le terme $\frac{k}{\lambda+k}$ n'est pas borné. La figure suivante représente g pour $n = 3$, avec la droite d'équation $y = 1$:



- Sur $]-k-1, -k[$, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$, le terme $\frac{k+1}{\lambda+k+1}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\lambda \to (-k-1)^+$, et le terme $\frac{k}{\lambda+k}$ tend vers $-\infty$ lorsque $\lambda \to (-k)^-$. La fonction g réalise donc une bijection de $]-k-1, -k[$ sur $\mathbb{R}$, et prend exactement une fois la valeur 1. Cela fournit $n-1$ solutions.
- Sur $]-1, +\infty[$, g tend vers $+\infty$ en $(-1)^+$ et vers 0 en $+\infty$: elle réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et prend exactement une fois la valeur 1. Cette n-ième solution est positive, puisque $g(0) = n > 1$.
- Sur $]-\infty, -n[$, tous les termes sont négatifs, donc $g < 0$ et l'équation n'a pas de solution. Ce n'était d'ailleurs pas utile, une matrice de taille n ayant au plus n valeurs propres.

Conclusion. L'équation $g(\lambda) = 1$ admet exactement n solutions réelles, deux à deux distinctes puisqu'elles se trouvent dans des intervalles disjoints. La matrice A_n, de taille n, possède donc n valeurs propres réelles distinctes : elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et chacun de ses sous-espaces propres est une droite.

Remarque

Pour $n = 2$, l'équation de la question 1 se résout à la main :

$$\frac{1}{\lambda+1} + \frac{2}{\lambda+2} = 1 \iff (\lambda+2) + 2(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda+2) \iff \lambda^2 = 2$$

On retrouve ainsi les valeurs propres $\pm\sqrt{2}$ de $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas général, on peut aussi localiser la valeur propre positive. Notons $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ les valeurs propres de A_n, de sorte que $\lambda_{n-k} \in]-k-1, -k[$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Les valeurs propres étant simples, leur somme vaut $\mathrm{Tr}(A_n) = 0$, donc $\lambda_n = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$, et en sommant les encadrements :

$$\frac{n(n-1)}{2} < \lambda_n < \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$