# Corrigé de la colle n° 04

*Réduction*

6 novembre 2026

---

**Exercice 1.** Soit $\alpha$ un réel et soit $A$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

---

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3+\alpha & 5-\alpha & -\alpha \\ \alpha & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ -5 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1'=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 5-\alpha & -\alpha \\ \lambda+2 & \lambda+2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1'=L_2-L_1}{=} (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 5-\alpha & -\alpha \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-3).$$

D'où : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 3\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim SEP(-2) \leq 2 \\ 1 \leq \dim SEP(3) \leq 1 \end{cases}$.

La matrice $A$ est diagonalisable *ssi* $\dim SEP(-2) + \dim SEP(3) = \dim \mathbb{R}^3$, *ssi* $\dim SEP(-2) = 2$. On cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre $-2$ :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (*) \begin{cases} x = y \\ \alpha z = 0 \end{cases}.$$

– si $\alpha = 0$, alors $(*) \iff x = y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 2$, donc $A$ est diagonalisable ;

– si $\alpha \neq 0$, alors $(*) \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\dim SEP(-2) = 1$, donc $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 2.** Soient un nombre complexe $a$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ de la matrice $M$.
2. On suppose que $a = 0$. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
3. On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
4. On suppose que $a = \dfrac{27}{4}$. Montrer que le polynôme $\chi_M(X)$ et sa dérivée $\chi_M'(X)$ possèdent une racine commune. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$ la matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

---

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ \chi_M(z) = \begin{vmatrix} z & 0 & -a \\ -1 & z & 0 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = z^3 - az - a.$
2. Si $a = 0$ alors $\chi_M(X) = X^3$, d'où 0 est l'unique valeur propre de $M$. Si $M$ est diagonalisable, alors il existe $P$ telle que $P^{-1}MP = 0$. C'est absurde car $M \neq 0$. Donc $M$ n'est pas diagonalisable.
3. Si $a = \dfrac{1}{2}$, alors $\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)(X^2 + X + \frac{1}{2})$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1; -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}$. La matrice $M$ possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc $M$ est diagonalisable.
4. La dérivée du polynôme $\chi_M(X)$ est le polynôme $\chi'_M(X) = 3X^2 - a$. Si $a = \dfrac{27}{4}$, alors $-\dfrac{3}{2}$ est une racine de $\chi_M(X)$ et de $\chi'_M(X)$, d'où $-\dfrac{3}{2}$ est une racine au moins double de $\chi_M(X)$.

   $\chi_M(X) = (X + \frac{3}{2})(X-3)$, do'ù $\mathrm{Sp}(M) = \{-\frac{3}{2}; 3\}$ et $\begin{cases} \dim E_3(M) = 1 \\ 1 \leq \dim E_{-3/2}(M) \leq 2 \end{cases}$. La matrice $M$ est diagonalisable si, et seulement si, $\dim E_3(M) + \dim E_{-3/2}(M) = 3$ si, et seulement si, $\dim E_{-3/2}(M) = 2$. Or

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   D'où $\dim E_{-3/2}(M) = 1$. Donc $M$ n'est pas diagonalisable.
5. Si le polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ possède une racine $z$ double, alors $\chi_M(z) = z^3 - az - a = 0$ et $\chi'_M(z) = 3z^2 - a = 0$. D'où $a = 0$ ou $z = -\frac{3}{2}$ (car $0 = 3\chi_M(z) - z\chi'_M(z) = -2az - 3a$).

   Si $a = 0$, alors $M$ n'est pas diagonalisable (question 2).

   Si $z = -\frac{3}{2}$, alors $a = \frac{27}{4}$, d'où $M$ n'est pas diagonalisable (question 4).

   Sinon, les racines du polynôme caractéristique sont simples, d'où il existe 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc $M$ est diagonalisable.

   Donc la matrice $M$ est diagonalisable si, et seulement si, $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{0; \frac{27}{4}\right\}$.

**Exercice 3.** Soient $n-1$ réels $a_1, \ldots, a_{n-1}$ non tous nuls. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}).$$

Déterminer son rang et son spectre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

---

1. Méthode 1 (sans polynôme caractéristique) — Le rang de $A$ est égal à 2 car les réels $a_i$ ne sont pas tous nuls, par hypothèse. D'où 0 est une valeur propre et le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$ d'après le théorème du rang. Existe-t-il d'autres valeurs propres ? Soient $\lambda \neq 0$ et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ a_2 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ x_i = \frac{a_i}{\lambda} x_n \\ (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2) x_n = \lambda^2 x_n \end{cases}$$

   On cherche un vecteur propre, supposons donc que le vecteur-colonne $X$ est non nul. Alors

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} \lambda^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \\ X = x_n (a_1\ a_2 \cdots a_{n-1}\ \lambda)^T \end{cases}$$

D'où il y a deux valeurs propres $\pm toto$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels $a_i$ ne sont pas tous nuls, par hypothèse. De plus $\dim E_{+toto}(A) = 1 = \dim E_{-toto}(A)$.

On en déduit que $\dim E_0(A) + \dim E_{+toto}(A) + \dim E_{-toto}(A) = n - 2 + 1 + 1$ est égale à la taille de la matrice $A$, donc cette matrice est diagonalisable.

2. MÉTHODE 2 (avec polynôme caractéristique) — Soit $x \in \mathbb{R}$ :

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & x & -a_{n-1} \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix} = x^n - x^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$$ en développant suivant la dernière ligne. On factorise : $\det(xI_n - A) = x^{n-2}(x - toto)(x + toto)$, où $toto = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2} \neq 0$ car les réels $a_i$ ne sont pas tous nuls, par hypothèse.

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, +toto, -toto\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim E_0(A) \leq n-2 \\ 1 \leq \dim E_{+toto}(A) \leq 1 \\ 1 \leq \dim E_{-toto}(A) \leq 1 \end{cases}$

Or le rang de $A$ est égal à 2 car les réels $a_i$ ne sont pas tous nuls, par hypothèse. Doù le *sep* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n - 2$ d'après le théorème du rang. Par suite la somme des dimensions des *sep* de la matrice $A$ est égale à la taille de cette matrice. La matrice $A$ est donc diagonalisable.