Kdo n° 2 du 5 / 11 / 2026

Réduction

Exercice 1 (Diagonalisation simultanée)**.**

Soient A et B deux matrices diagonalisables. Montrer que : les matrices A et B commutent ($AB = BA$) si, et seulement si, il existe une même matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un entier naturel impair k tel que $A^k = B^k$.

1. Comparer les sous-espaces propres des matrices A et A^k.
2. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que les matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$ soient de le forme :

$$A' = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{array} \begin{array}{c} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} \quad \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \quad \cdots \quad \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & \vdots & 0 & & & \\ \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & \vdots & \lambda_2 I_{d_2} & \vdots & 0 & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & & \vdots & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad B' = \begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{array} \begin{array}{c} \overset{d_1}{\longleftrightarrow} \quad \overset{d_2}{\longleftrightarrow} \quad \cdots \quad \overset{d_r}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} B_1 & \vdots & 0 & & & \\ \cdots & & \cdots & & & \\ 0 & \vdots & B_2 & \vdots & 0 & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & & \vdots & B_r \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. En déduire que : $A = B$.
4. Cette dernière propriété est-elle encore vraie si k est pair ? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?