Kdo n° 1 du 5 / 11 / 2026

Intégrales (d'après CCP TSI 2011 Math 1)

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}-1}{x}.$$

   Qu'en déduire ?
3. Soit g la fonction définie pour tout réel x strictement positif par l'intégrale

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,dt.$$

   Montrer que la fonction g est bornée.
4. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.
5. Soit x_0 un réel strictement positif.

   Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}.$$

   Qu'en déduire ?