# Corrigé du Kdo n° du 5 / 11 / 2026

*Intégrales (d'après CCP TSI 2011 Math 1)*

6 novembre 2026

---

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt$$

qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. Montrer que la fonction $f$ est décroissante.
2. Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,
$$\frac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}-1}{x}.$$
Qu'en déduire ?
3. Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par l'intégrale
$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,dt.$$
Montrer que la fonction $g$ est bornée.
4. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand $x$ tend vers $0^+$.
5. Soit $x_0$ un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$,
$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}.$$
Qu'en déduire ?

---

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt$.

1. Soient $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_2 \geq x_1 > 0$. Alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{x_2+t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x_1+t}$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où (par croisssance de l'intégrale) $f(x_2) \leq f(x_1)$. Donc $f$ est décroissante.
2. Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t}{x+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x+t} \leq \dfrac{\mathrm{e}^t}{x}$, d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+1}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x}$, donc $\dfrac{\mathrm{e}-1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$. On divise chaque membre de l'inégalité précédente par $\dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$ qui est strictement positif : $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}} \leq 1$, d'où $\dfrac{f(x)}{\frac{\mathrm{e}-1}{x}}$ tend vers 1 quand $x$ tend vers $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes. Donc $f(x) \sim \dfrac{\mathrm{e}-1}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
3. Soit $t \in [0,1]$ : la fonction exp est continue sur $[0,t]$ et dérivable sur $]0,t[$, d'où, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]0,t[$ tel que $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^c \cdot (t-0)$. D'où $\mathrm{e}^c \leq \mathrm{e}$ car $t \in [0,1]$ et exp est croissante, donc $\mathrm{e}^t - 1 \leq \mathrm{e} \times t$ pour tout $t \in [0,1]$. $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t}\,dt$. D'une part, $g(x) \geq 0$ car l'intégrande est positif sur $[0,1]$ ; d'autre part, $g(x) \leq \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}\,dt \leq \mathrm{e}$ car $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{x+t} \leq \dfrac{\mathrm{e} \times t}{x+t} \leq \mathrm{e}$ car $\dfrac{t}{x+t} \leq 1$ car $x > 0$. Donc la fonction $g$ est bornée.

4. $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{x+t}\,dt = f(x) - \ln(1+x) + \ln(x)$, d'où $f(x) = g(x) + \ln(1+x) - \ln(x)$, donc $\dfrac{f(x)}{\ln(x)} = \dfrac{g(x)}{\ln(x)} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} - 1$ tend vers -1 car $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $g$ est bornée et $\ln(1+x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ quand $x$ tend vers $0^+$.

5. Soit $x_0 > 0$ et $x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$ : $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x_0+t}\right) dt = (x_0 - x)\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)(x_0+t)}\,dt$. Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{\mathrm{e}^t}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{\mathrm{e}}{x x_0} \leq \frac{2\mathrm{e}}{x_0 x_0}$, donc $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$.

   Quand $x$ tend vers $x_0$, $\dfrac{2 \cdot \mathrm{e} \cdot |x - x_0|}{x_0^2}$ tend vers zéro, et d'après l'inégalité de la question précédente et le théorème des gendarmes, $|f(x) - f(x_0)|$ aussi, d'où $f(x)$ tend $f(x_0)$. Donc la fonction $f$ est continue en $x_0$. Ceci est vrai pour tout $x_0 > 0$. Donc $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.