Corrigé du D.S. n° 3 de mathématiques

Exercice (MPI)

La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt$ est appelée le **gudermannien**.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt.$$

2) Étudier la parité de la fonction F.

3) Montrer que les intégrales généralisées
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$$
sont convergentes. Quelle est la valeur de l'intégrale I ?

4) Dresser le tableau des variations de la fonction F et tracer la courbe d'équation $y = F(x)$, sa tangente à l'origine ainsi que ses asymptotes.

5) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

6) Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $R_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt$ est convergente.

8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} + R_n$.

9) En déduire la valeur de l'intégrale J.

---

1) On pose le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$: $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = 2\dfrac{u}{u^2+1}$ et $du = u\,dt$, donc $F(x) = 2\int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u^2+1} = [2\arctan(u)]_1^{\mathrm{e}^x} = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable $u = -t$ de classe $\mathcal{C}^1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^{-x} \frac{1}{\operatorname{ch}(-u)}\,(-du) = -\int_0^{-x} \frac{1}{\operatorname{ch}(u)}\,du$ car la fonction ch est paire. D'où $F(x) = F(-x)$. Donc la fonction F est impaire.

Autre méthode : pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, or $\mathrm{e}^x > 0$, d'où $\arctan(\mathrm{e}^x) + \arctan(\mathrm{e}^{-x}) = \pi/2$, d'où $F(x) + F(-x) = 0$, donc la fonction F est impaire.

3) L'intégrale I est impropre en $+\infty$. Or $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\mathrm{e}^t}$ qui ne change pas de signe et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. Donc l'intégrale I converge. Et $I = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Autre méthode : la fonction F possède une limite finie en $+\infty$, d'où l'intégrale I converge et sa valeur est $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

L'intégrale J est impropre en 0 et en $+\infty$: elle converge si, et seulement si, les intégrales $K = \int_0^1 \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$ et $L = \int_1^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$ convergent.

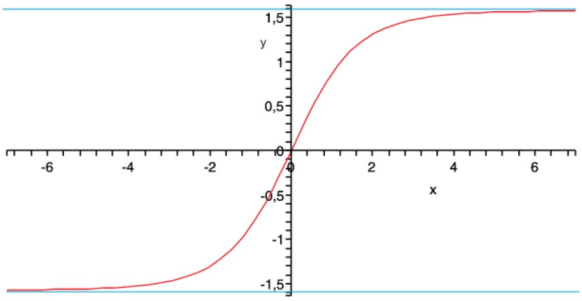
L'intégrale K est impropre en 0. Or $\frac{t}{\operatorname{sh} t} = \frac{2t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = \frac{2t}{(1+t+t\varepsilon(t)) - (1-t+t\varepsilon(t))} = \frac{1}{1+\varepsilon(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, d'où l'intégrale K est faussement impropre, donc elle converge.

L'intégrale L est impropre en $+\infty$. Or $\frac{t}{\operatorname{sh} t} = \frac{2t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t}{\mathrm{e}^t}$ qui ne change pas de signe. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t}\,dt$ converge car $\frac{t}{\mathrm{e}^t} = t\mathrm{e}^{-t/2}\cdot \mathrm{e}^{-t/2} = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t/2})$ et $\mathrm{e}^{-t/2}$ ne change pas de signe et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,dt$ converge. D'où l'intégrale L converge.

Donc l'intégrale J converge.

4) La fonction F est impaire. Et elle est dérivable car c'est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t}$. La fonction F est strictement croissante car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	1	$+$	
$F(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\pi/2$



5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. D'où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Donc $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

6) Les fonctions $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{-k}$ et $t \mapsto t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on intègre par partie : $\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-kt}\,dt = \left[t\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{-k}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{-k}\,dt = -\frac{x}{k}\mathrm{e}^{-kx} + \frac{1}{k^2}(1-\mathrm{e}^{-kx}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k^2}$ car $x\mathrm{e}^{-kx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $J_k = \frac{1}{k^2}$.

7) L'intégrale $R_n = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Elle converge si, et seulement si, les intégrales $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$ convergent. D'une part, $\frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\mathrm{e}^{-(2n+1)t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc la première intégrale converge. D'autre part, $\mathrm{e}^{2t} \geq 2t-1$ par convexité de la fonction exp, d'où $0 \leq \frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1}\mathrm{e}^{-(2n+1)t} \leq \mathrm{e}^{-(2n+1)t}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt$ converge, donc la deuxième intégrale converge.

Donc l'intégrale R_n converge.

8) Pour tout $t > 0$, $\frac{t}{\operatorname{sh} t} = \frac{2t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}}$ et $\frac{1-\mathrm{e}^{-(2n+2)t}}{1-\mathrm{e}^{-2t}} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{e}^{-2pt}$ (car c'est une somme géométrique de raison e^{-2t} différente de 1), donc $J = 2\sum_{p=0}^{n} J_{2p+1} + R_n$.

9) De $0 \leq \frac{2t}{\mathrm{e}^{2t}-1} \leq 1$, on tire que $0 \leq R_n \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt = \frac{1}{2n+1}$. D'où $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Or $J - 2\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} = R_n$ d'après les questions 6 et 8. $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $J = 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Donc $\boxed{J = \frac{\pi^2}{4}}$ d'après la question 5.

Exercice (MPI*) d'après E3A Math 2 PSI 2016

On étudie la fonction H définie par $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$.

1) Montrer que, pour tout $x > -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt$ converge et déterminer sa valeur

2) Montrer que, pour tout $x \leq -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt$ diverge.

3) Montrer que $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$ est défini si, et seulement si, $x > -1$.

4) Montrer que la fonction H est monotone sur $]-1, +\infty[$. Préciser le signe de $H(x)$ pour tout $x > -1$.

5) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est prolongeable par continuité en 0^+ et en 1^-.

6) En déduire qu'il existe un réel M tel que $\forall x > 0,\ H(x) \leq \dfrac{M}{x}$.

7) Montrer que $H(x) - H(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ pour tout $x > -1$.

8) Soit $x > -1$. Calculer $H(x) - H(x+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{(x+k)^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = H(x)$.

9) Soit $x > -1$. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} \leq H(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

10) En déduire un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

11) Etudier la nature de la série numérique $\sum H(n)$.

12) Montrer que la série numérique $\sum (-1)^n H(n)$ est convergente.

13) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$.

14) A l'aide d'un changement de variable, déterminer la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

---

1) L'intégrale est impropre en 0. Soit $y > 0$. Une intégration par parties donne

$$\int_y^1 t^x \ln(t)\,dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\ln(t)\right]_y^1 - \frac{1}{x+1}\int_y^1 t^x\,dt$$

car les fonctions ln et $t \mapsto \frac{t^{x+1}}{x+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Le terme entre crochets a pour limite 0 quand y tend vers 0, par croissances comparées (car $x > -1$). Et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x\,dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0 (car $x > -1$) et vaut $\frac{1}{x+1}$. Donc

l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt$ converge et vaut $-\frac{1}{(x+1)^2}$.

2) L'intégrale est impropre en 0. Et $t^x \underset{t\to 0}{=} o(t^x \ln t)$. Or $t^x \ln(t)$ ne change pas de signe et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x\,dt$ diverge d'après le critère de Riemann en 0, car $x \leq -1$. Donc

l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt$ diverge.

3) L'intégrale est impropre en 0 et en 1, d'où elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$ convergent.

D'une part, $\displaystyle\frac{t^x \ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0}{\sim} -t^x \ln(t)$ qui ne change pas de signe. Or $\displaystyle\int_0^1 t^x \ln(t)\,dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$ d'après les questions 1 et 2. D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

D'autre part, $\displaystyle\frac{t^x \ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ car elle est faussement impropre.

Donc $\boxed{H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,dt \text{ est défini si, et seulement si, } x > -1.}$

4) L'intégrande est positif car c'est le produit de t^x positif, de $\ln(t)$ négatif et de $\frac{1}{t-1}$ négatif. On intègre de 0 à 1 : par croissance de l'intégrale, $\boxed{H(x) \text{ est positif pour tout } x > -1.}$

Si $x \le y$ alors pour tout $t \in]0,1[$, $t^x = \exp(x\ln(t)) \ge \exp(y\ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t) \le 0$ et exp est croissante). On multiplie par $\frac{\ln(t)}{t-1} \ge 0$ et on intégre sur $]0,1[$. D'où : si $-1 < x \le y$, $H(x) \ge H(y)$ par croissance de l'intégrale. Donc

$\boxed{\text{la fonction } H \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[.}$

5) $g(t) = \displaystyle\frac{t\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Et $g(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$ car $\displaystyle\frac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1$.

6) Ainsi prolongée, la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée. Soit alors M un majorant de g sur $[0,1]$: $\forall t \in]0,1[,\ \displaystyle\frac{t^x \ln t}{t-1} \le Mt^{x-1}$.

Par croissance de l'intégrale, $\boxed{H(x) \le \displaystyle\int_0^1 Mt^{x-1}\,dt = \frac{M}{x} \text{ pour tout } x > 0.}$

7) $H(x)-H(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\,dt = -\int_0^1 t^x\ln(t)\,dt = \frac{1}{(x+1)^2}$ d'après la question 1. Donc $\boxed{H(x) - H(x+1) = \displaystyle\frac{1}{(x+1)^2}.}$

8) Par télescopage, $H(x) - H(x+n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [H(x+k-1) - H(x+k)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or la suite $H(x+n)$ tend vers 0 car, d'après les questions 4 et 6, $0 \le H(x+n) \le \displaystyle\frac{M}{x+n}$ pour tout $n \ge 2$. Or $\displaystyle\frac{M}{x+n}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Donc $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{(x+k)^2} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = H(x).}$

9) Soient $x > -1$ et $N \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ est continue et décroissante, d'où, en comparant série et intégrale :

$$\left[\frac{-1}{x+t}\right]_1^{N+1} = \int_1^{N+1} \frac{1}{(x+t)^2}\,dt \le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(x+k)^2} \le \frac{1}{(x+1)^2} + \int_1^N \frac{1}{(x+t)^2}\,dt = \frac{1}{(x+1)^2} + \left[\frac{-1}{x+t}\right]_1^N.$$

Les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$, donc $\displaystyle\frac{1}{x+1} \le H(x) \le \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

10) On divise par $\frac{1}{x+1} > 0$ chaque membre de l'encadrement précédent : $1 \le \frac{H(x)}{\frac{1}{x+1}} \le 1 + \displaystyle\frac{1}{(x+1)}$. D'après le théorème des

gendarmes, $\frac{H(x)}{\frac{1}{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\boxed{H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$

11) $H(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc $\boxed{\text{la série } \sum H(n) \text{ diverge.}}$

12) La suite $H(n)$ tend vers 0, en décroissant d'après la question 4. Donc, d'après le théorème des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum(-1)^n H(n) \text{ est convergente.}}$

13) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H(k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 \frac{t^k \ln(t)}{t-1}\,dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\,dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,dt.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H(k) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt.$

Dans cette égalité, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt \leq H(n+1)$ car $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1-t}$ pour tout $t \in]0,1[$. Or la suite $H(n+1)$ tend vers 0. D'où, d'après le théorème des gendarmes, la suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ tend vers 0. Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n H(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.}$

14) La fonction $t \mapsto t^2$ étant de classe C^1 et strictement monotone sur $]0,1[$, on peut effectuer le changement de variable $u = t^2$ pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4}H(-1/2)$$

PROBLÈME d'après Math CCP 1 PC 2013

Objectif — On établit des conditions, nécessaire d'une part, suffisantes d'autre part, pour que deux matrices admettent un vecteur propre commun et en déduire une forme « normale » de vecteurs propres.

Notations et définitions — Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$, 0_n la matrice nulle d'ordre n et I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note :

$$\mathrm{Ker}\,(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mid MX = 0\},\ \mathrm{Im}\,(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\},$$
$$\mathrm{Sp}\,(M) \text{ le spectre de } M,\ E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n) \text{ et } \mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}\,(M - \lambda I_n).$$

Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$; on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :

i) $\mathbf{e} \neq 0$, **ii)** il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ et **iii)** il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.

De même si f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$–espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$.

Enfin, on définit le **commutateur** $[A, B]$ de deux matrices par la formule : $[A, B] = AB - BA$. Et celui $[f, g]$ de deux endomorphismes par : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les éléments propres (*id est* le spectre et une base de chaque sous-espace propre) de A.

2) Déterminer les éléments propres de B.

3) Quel est l'ensemble des vecteurs propres communs à A et B ?

Partie II : UN AUTRE EXEMPLE

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2k}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2k$.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2k} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

4) Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$ et $P = \sum_{i=0}^{2k} a_i X^i$. Montrer que $g(P) = \sum_{i=0}^{2k} a_{2k-i} X^i$.

5) Déterminer, dans la base canonique de E, la matrice A_k de l'endomorphisme f et la matrice B_k de l'endomorphisme g.

6) a) Vérifier que : si P est un vecteur propre de l'endomorphisme g, alors $\deg(P) \geqslant k$.

b) Déterminer les éléments propres de g

7) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f^i (égal à $f \circ f \cdots \circ f$ itéré i fois).

8) Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si, et seulement si, $i \geqslant k + 1$.

19

Partie III : UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET DES CONDITIONS SUFFISANTES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

9) Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.

1 **a)** Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}\,([A, B])$.

On en déduit que $\mathrm{rg}([A, B]) < n$.

2 **b)** En utilisant les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la partie II, montrer que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

On dit que A et B vérifient la **propriété** $\mathcal{H}$ s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ tel que : $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}\,([A, B])$.

2 **10)** Montrer que : si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \neq \emptyset$ 1 $\mathrm{Ker}\,[A,B] = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ 1

11) Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

1 **a)** Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que l'application linéaire ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.

2 **b)** En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante : « pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ. »

1 **12)** Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.

13) Dans cette question, on suppose que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$.

On note $C = [A, B]$, on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$ et on considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A.

1 **a)** Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

1 **b)** Montrer que $\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

2 **c)** Etablir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

3 **d)** Montrer que les applications linéaires φ 1 et ψ 2 définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

1 **e)** Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

1 **14)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

1 **15)** En utilisant les matrices A_1 et B_1 de la partie II, déterminer le rang de $[A_1^2, B_1]$ et montrer que la condition suffisante de $\mathcal{P}_3$ n'est pas nécessaire.

17

Partie IV : FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, \exists i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i = 0 \right\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur propre de A. On dit que X est **sous forme normale** si :

- $X \in \mathcal{N}$ ou
- il existe $\lambda' \in \mathrm{Sp}(A)$ et il existe $U \in \mathcal{N}$ tel que $X = (A - \lambda' I_n)U$.

2 **16)** Dans cette question, on suppose que A possède une valeur propre λ telle que $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$..

Montrer que A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = -M$. Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\varphi(M) = AM + M\,{}^tA$ et $\psi(M) = AM\,{}^tA$.

2 **17) a)** Montrer que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. (les applications linéaires)

1 **b)** Comparer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.

18) Dans cette question, on suppose que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2. On considère X_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et X_2 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2. On note $B = X_1\,{}^tX_2 - X_2\,{}^tX_1$.

2 **a)** Montrer que $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ et que $B \neq 0_n$. 0,5 1,5

2 **b)** Vérifier que les matrices $AB + B\,{}^tA$ et $AB\,{}^tA$ sont colinéaires à B. 0,5 0,5

En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$. 1

1 **c)** Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$. Montrer qu'au moins l'une des colonnes de B est un vecteur propre de A sous forme normale.

1 **d)** Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

19) Dans cette question, on suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre λ.

2 **a)** Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle et deux scalaires $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$AB + B\,{}^tA = \alpha B \quad \text{et} \quad AB\,{}^tA = \beta B.$$

1 **b)** En déduire qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0_n$.

Dans le cas où $(A - \delta I_n)B = 0_n$, on admettra que, comme à la question 18c, A possède un vecteur propre sous forme normale. De même dans le cas où $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta = \lambda$, comme à la question 18d.

2 **c)** Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta \neq \lambda$. Montrer que $(A - \gamma I_n)B = 0$.

1 **20)** Que conclure ?

Partie I

1) Soit $z \in \mathbb{C}$: $\chi_A(z) = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^2(z+2)$.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2\}$ et $\begin{cases} 1 \leq \dim E_1(A) \leq 1 \\ 1 \leq \dim E_{-2}(A) \leq 2 \end{cases}$.

Le vecteur colonne $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ est un vecteur propre de A car $AU_1 = -2U_1$ et $U_1 \neq 0$. Or la dimension du sous-espace propre $E_{-2}(A)$ est 1. D'où $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$AX = 1X \iff \begin{cases} -y-z = x \\ -x-z = y \\ -x-y = z \end{cases} \iff x+y+z = 0 \iff z = -x-y \iff X = xU_2 + yU_3.$$

Les vecteurs $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$, linéairement indépendants, forment donc une base de $E_1(A)$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$: $\chi_B(z) = \begin{vmatrix} z-3 & 3 & 1 \\ 0 & z-2 & 0 \\ -1 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = (z-2)\begin{vmatrix} z-3 & 1 \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} = (z-2)^3$.

Donc $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$BX = 2X \iff \begin{cases} 3x-3y-z = 2x \\ 2y = 2y \\ x-3y+z = 2z \end{cases} \iff x-3y-z = 0 \iff z = x-3y \iff X = xV_1 + yV_3.$$

Les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$, linéairement indépendants, forment donc une base de $E_2(B)$.

3) Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) \cap E_2(B) &\iff \begin{cases} x+y+z = 0 & L_1 \\ x-3y-z = 0 & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-2y = 0 & L_1+L_2 \\ 4y+2z = 0 & L_1-L_2 \end{cases} \\ &\iff X = y\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Donc le vecteur colonne $W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ forme une base de $E_1(A) \cap E_2(B)$.

D'autre part $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$ car le vecteur U_1 n'appartient pas à $E_2(B)$ car $BU_1 \neq 2U_1$. Donc l'ensemble des vecteurs propres communs aux matrices A et B est $\mathrm{Vect}(W) \setminus \{0\}$.

Partie II

4) $g(P) = X^{2k}\sum_{i=0}^{2k} \frac{a_i}{X^i} = \sum_{i=0}^{2k} a_i X^{2k-i} = \sum_{j=0}^{2k} a_{2k-j} X^j$ en effectuant le changement d'indice $j = 2k-i$.

5) $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 & 2k \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ car $f(X^0) = 0$ et $\forall i \in [\![1, 2k]\!],\ f(X^i) = iX^{i-1}$. Et $B_k = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & (0) & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & (0) & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ car $\forall i \in [\![0, 2k]\!],\ f(X^i) = X^{2k-i}$.

6) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $P \in E$ tel que $g(P) = \lambda P$. On suppose que $\deg(P) \leq k-1$, il existe alors $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$. Et $g(P) = \sum_{i=k+1}^{2k} a_{2k-i} X^i = \lambda P = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda a_i X^i$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient pour tout $i \in [\![k+1, 2k]\!]$, $a_{2k-i} = 0$, donc $P = 0$. On a montré qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$ ne peut pas être vecteur propre de g, autrement dit les vecteurs propres de g sont de degré supérieur ou égal à k.

b) $g(X^k) = \frac{X^{2k}}{X^k} = X^k$, donc X^k est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1. De même, pour chaque $i \in [\![0, k-1]\!]$, si on pose $P_i = X^i + X^{2k-i}$ et $Q_i = X^i - X^{2k-i}$, alors $g(P_i) = P_i$ et $g(Q_i) = -Q_i$. La famille $(P_0, \cdots, P_{k-1}, X^k, Q_0, \cdots, Q_{k-1})$ de polynômes de $\mathbb{C}_{2k}[X]$ est libre, son cardinal $2k$ est égal à la dimension de l'ev $\mathbb{C}_{2k}[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{C}_{2k}[X]$. Or cette base est formée de vecteurs propres de l'endomorphisme g. D'où $\mathrm{Sp}(g) = \{+1; -1\}$, une base du sous-espace propre $E_{+1}(g)$ est $(P_0, \cdots, P_{k-1}, X^k)$ et une base de $E_{-1}(g)$ est $(Q_0, \cdots, Q_{k-1})$.

7) Comme $i \geq 1$, $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X] \neq \{0\}$, donc 0 est une valeur propre de f^i. Et il n'y en a pas d'autre car, par l'absurde : si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de f^i et P un vecteur propre associé, alors $P^{(i)} = \lambda P$. D'une part $\lambda \neq 0$, donc $\deg(\lambda P) = \deg P$. D'autre part $P \neq 0$, donc $\deg(P^{(i)}) < \deg P$. Ceci est absurde. On a montré $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.

8) On suppose d'abord que f^i et g possèdent un vecteur propre commun P. D'après la question 7, $\deg(P) \leq i-1$. D'après la question 6a , $\deg(P) \geq k$. D'où $k \leq i-1$, c'est-à-dire $i \geq k-1$. On suppose maintenant $i \geq k-1$. Alors X^k est un vecteur propre de g d'après la question 6b et $X^k \in \mathbb{C}_{i-1}[X] = \mathrm{Ker}(f^i)$, donc c'est aussi un vecteur popre de f^i. D'où l'équivalence.

Partie III

9) **a)** e est un vecteur propre à la fois pour A et B, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$.
Donc $(AB - BA)e = ABe - BAe = A(\mu e) - B(\lambda e) = \lambda\mu e - \mu\lambda e = 0$. Donc $e \in \mathrm{Ker}([A, B])$.

b) Les matrices A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun d'après la question 8, or $\mathrm{rg}([A_1, B_1]) = 2 < 3$, donc la condition nécessaire $\mathrm{rg}([A, B]) < n$ n'est pas suffisante.

10) Puisque le corps des scalaires est $\mathbb{C}$, la matrice A possède au moins une valeur propre : il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Puisque $[A, B] = 0_n$, $\mathrm{Ker}([A, B]) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. D'où $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B])$, donc A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

11) **a)** Soit $X \in E_\lambda(A)$. Alors $X \in \mathrm{Ker}(AB - BA)$, d'où $ABX = BAX$. Par conséquent $A\Psi(X) = ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda\Psi(X)$, donc $\Psi(X) \in E_\lambda(A)$.

b) L'endomorphisme Ψ admet au moins une valeur propre complexe μ et donc un vecteur propre associé $Y \in E_\lambda(A)$.
Ainsi $Y \neq 0$, $AY = \lambda Y$, et $BY = \Psi(Y) = \mu Y$, donc Y est un vecteur propre commun à A et B.

12) En dimension 1, tous les endomorphismes sont des homothéties. Donc tout vecteur non nul (il en existe bien en dimension 1) est un vecteur propre commun à 2 endomorphismes, ce qui démontre $\mathcal{P}_1$.

13) **a)** Puisque A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, $E_\lambda(A) \not\subset \mathrm{Ker}(C)$.
Il existe donc $x \in E_\lambda(A)$ tel que $x \notin \mathrm{Ker}(C)$, autrement dit $Au = \lambda u$ et $Cu \neq 0$.

b) $v \in \mathrm{Im}(C)$ qui est un espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(v) \subset \mathrm{Im}(C)$. De plus $v \neq 0$, donc $\dim \mathrm{Vect}(v) = 1 = \mathrm{rg}(C)$, donc $\mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Im}(C)$.

Soit $v = Cu$:

$v = Cu = ABu - BAu = ABu - \lambda Bu = (A - \lambda I_n)(Bu) \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Donc $\mathrm{Im}C = \mathrm{Vect}(v) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

c) $\mathrm{rg}(C) = 1$, donc l'inclusion précédente donne $\dim \mathrm{Im}_\lambda(A) \geq \dim \mathrm{Im}(C) = 1$.
D'autre part, λ est une valeur propre de A, donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \geq 1$.
Par théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}_\lambda(A) \leq n - 1$.

d) $[A, A - \lambda I_n] = A(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)A = A^2 - \lambda A - A^2 + \lambda A = 0_n$.
$[B, A - \lambda I_n] = B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B = BA - \lambda B - AB + \lambda B = BA - AB = -C$.
A et $A - \lambda I_n$ commutent, donc $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ est stable par A, donc l'application φ, qui est linéaire, définit un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.
Soit $Y \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Y = (A - \lambda I_n)X$.
Alors $BY = B(A - \lambda I_n)X = (A - \lambda I_n)BX - CX$.
Or $CX \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$ d'après la question 13b, $(A - \lambda I_n)X$ aussi par définition, donc $BY \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$.
Donc $\mathrm{Im}_\lambda(A)$ est stable par B, donc l'application ψ, qui est linéaire, définit un endomorphisme de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

e) On pose $k = \dim \mathrm{Im}_\lambda(A)$. Alors $k \in [\![1, n-1]\!]$ d'après 13c. De plus, $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ est une restriction de $AB - BA$, donc $\mathrm{rg}([\varphi, \Psi]) \leq \mathrm{rg}([A, B]) = 1$.
On peut donc appliquer la propriété $\mathcal{P}_k$, donc φ et ψ admettent un vecteur propre commun.
Par définition de φ et ψ, ce vecteur est aussi un vecteur propre commun à A et B.

14) On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$: on a montré $\mathcal{P}_1$ à la question 12, d'où l'initialisation. Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}_k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et on montre $\mathcal{P}_n$.
On considère E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et φ, ψ deux endomorphismes de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leq 1$. On introduit A et B les matrices de φ et ψ dans une même base de E.
Si les matrices A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$, elles admettent un vecteur propre commun d'après la question 11b. Si les

matrices A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, elles admettent un vecteur propre commun d'après la question 13e . Dans tous les cas, A et B admettent un vecteur propre commun, donc φ et ψ aussi. D'où $\mathcal{P}_n$, ce qui achève la récurrence.
On a bien démontré $\mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15) $[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang 2.

Or A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre commun d'après la question 8, donc la condition suffisante de $\mathcal{P}_3$ n'est pas nécessaire.

Partie IV

16) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1 = 0 \right\}$ est un *sev* de dimension $n-1$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. D'où $\dim(H \cap E_\lambda(A)) = \dim H + \dim E_\lambda(A) - \dim(H + E_\lambda(A)) \geq n - 1 + 2 - n = 1$. Donc il existe $X \in H \cap E_\lambda(A)$ tel que $X \neq 0$. Ce X appartient à $\mathcal{N}$, donc est sous forme normale, et est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

17)

a) Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, ${}^t(\varphi(M)) = {}^t(AM) + {}^t(M^tA) = {}^tM{}^tA + A^tM = -M^tA - AM = -\varphi(M)$, donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

Et ${}^t(\psi(M)) = {}^t(AM^tA) = A^tM^tA = -AM^tA = -\psi(M)$, donc $\psi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

b) Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(\psi(M)) = AAM^tA + AM^tA^tA$ et $\psi(\varphi(M)) = A(AM + M^tA)^tA = AAM^tA + AM^tA^tA$, donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

18)

a) X_1 est une matrice colonne, ${}^tX_2$ une matrice ligne, donc $X_1{}^tX_2$ est une matrice carrée de taille n, de même pour B.
${}^tB = X_2^tX_1 - X_1^tX_2 = -B$, donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
X_2 est non nul, donc admet un coefficient non nul, que l'on appelle y, situé en i-ième position. Alors la i-ème colonne de $X_1^tX_2$ est yX_1, également non nulle.
Or la i-ème colonne de $X_2^tX_1$ est colinéaire à X_2, et (X_1, X_2) est libre (ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes).
Donc la i-ème colonne de $X_1^tX_2 - X_2^tX_1$ est non nulle, donc $B \neq 0_n$.

b) $AB + B^tA = AX_1^tX_2 - AX_2^tX_1 + X_1^tX_2^tA - X_2^tX_1^tA = \lambda X_1^tX_2 - \lambda_2 X_2^tX_1 + \lambda_2 X_1^tX_2 - \lambda_1 X_2^tX_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.

Et $AB^tA = AX_1^tX_2^tA - AX_2^tX_1^tA = \lambda_1\lambda_2 B$.

Donc $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1\lambda_2 B = A^2B - A(AB + B^tA) + AB^tA = 0_n$.

c) On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B. De $B \neq 0_n$, on déduit qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $C_k \neq 0$. La relation $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$ donne en particulier $(A - \lambda_2 I_n)C_k = 0$, donc C_k est un vecteur propre de A. Enfin, puisque $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $C_k \in \mathcal{N}$ car tous les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Donc C_k est un vecteur propre de A sous forme normale.

d) On note maintenant $D_1, \ldots, D_n$ les colonnes de $(A - \lambda_2 I_n)B$. De même, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $D_k \neq 0$.
On aura cette fois-ci $(A - \lambda_1 I_n)D_k = 0$, donc D_k est un vecteur propre de A.
Or $D_k = (A - \lambda_2 I_n)C_k$ et $C_k \in \mathcal{N}$, donc D_k est un vecteur propre de A sous forme normale.

19)

a) D'après la question 17, on peut utiliser les questions 10 et 11 pour conclure que φ et ψ admettent un vecteur propre commun $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Ce B vérifie les propriétés voulues.

b) $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = A^2B - A(AB + B^tA) + AB^tA = 0_n$. Or le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en $(X - \gamma)(X - \delta)$, avec $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Donc $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = (A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$.

c) $\delta \neq \lambda$ et λ est la seule valeur propre de A. D'où δ n'est pas une valeur propre de A, et $A - \delta I_n$ est donc inversible. De plus $(A - \gamma I_n)$ et $(A - \delta I_n)$ commutent, donc $(A - \delta I_n)(A - \gamma I_n)B = 0$. Or $A - \delta I_n$ est inversible, donc $(A - \gamma I_n)B = 0$.

d) On vient de montrer que, si la matrice A n'admet qu'une seule valeur propre, alors A possède un vecteur propre sous forme normale. Or, pour tout $n \geq 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre, et on a traité auparavant le cas où A admet au moins deux valeurs propres distinctes.

On a finalement démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède un vecteur propre sous forme normale.