Feuille de T.D. n° 5

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^n \ln(x) \quad \text{si} \quad x \in]0,1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. Vers quelle fonction f ?
2. Dresser le tableau des variations de chaque fonction f_n. La convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto n^k x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a,+\infty[$?

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a > 0$.

Exercice 4. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n \,:\, [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+n}{1+nx}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. Vers quelle fonction f ?
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau des variations de la fonction $f - f_n$.
3. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 5. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, de deux manières : en utilisant la question précédente et sans l'utiliser.
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Exercice 6. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1}. En déduire la limite de (u_n).
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

Exercice 7 (convergence dominée)**.**

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$
est une intégrale convergente.
2. Montrer que la suite des fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.

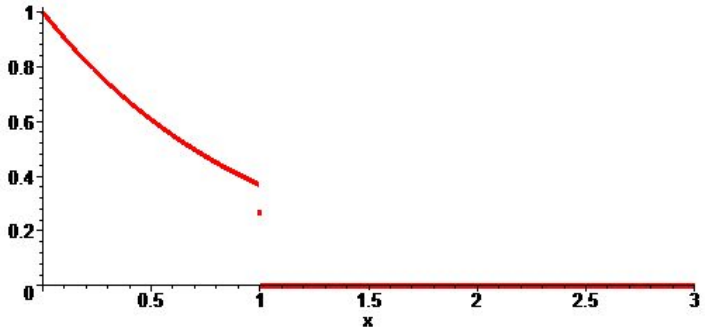


FIGURE 1 – LA LIMITE f DE LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : [0, +\infty[\to, \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice 8. Soit une suite de fonctions $f_n :]0, 1[\to \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction f. On suppose que :

1. chaque fonction f_n est croissante. Montrer que f l'est aussi.
2. chaque fonction f_n est bornée. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?
3. chaque fonction f_n est polynomiale. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?

Exercice 9. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Et aussi : les exercices 1 & 2 du DS n° 4 MPI* 2025-2026 et les exercices 9,10,11,12,25,26,27,48,87,90 de la banque CCINP.