Corrigé du T.D. n° 5

Suites de fonctions

9 novembre 2026

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^n \ln(x) \quad \text{si} \quad x \in]0,1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. Vers quelle fonction f ?
2. Dresser le tableau des variations de chaque fonction f_n. La convergence de la suite (f_n) vers la fonction f est-elle uniforme sur $[0,1]$?

---

1. $f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; si $x \in]0,1[$, alors $f_n(x) = x^n \ln(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; $f_n(1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les variations de $f_n : \forall x \in]0,1],\ f_n'(x) = x^{n-1} \cdot [n\ln(x) + 1]$.

x	0		$\mathrm{e}^{-1/n}$		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{n\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

D'où $\max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n\mathrm{e}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la convergence est uniforme.

Exercice 2. Soit une constante $k \in \mathbb{R}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto n^k x \mathrm{e}^{-nx}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement : vers quelle fonction f ?
2. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Pour quelles valeurs du réel k la convergence est-elle uniforme sur $[a,+\infty[$?

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:
   — si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ ;
   — si $x > 0$, alors $f_n(x) = n^k x \mathrm{e}^{-nx}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ par croissances comparées.
   D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. Chaque fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = n^k(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}$, d'où le tableau des variations :

x	0		$1/n$		
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	n^{k-1}/e	$\searrow$	0

On en déduit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n^{k-1}}{\mathrm{e}}$ tend vers 0 si, et seulement si, $k < 1$.

Donc la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $k < 1$.

3. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n est décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. Or, à partir d'un certain rang : $a > \frac{1}{n}$, d'où la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$, d'où $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) = n^k a e^{-na}$ tend vers 0, donc la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, quelle que soit la valeur de la constante k.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{nx}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une limite f et déterminer cette limite. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais qu'elle l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x > 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$ alors que les fonctions f_n le sont.

Autre méthode : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n}$: $|f_n(u_n) - f(u_n)| = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. D'où $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ ne tend pas non plus vers zéro. Donc la convergence de la suite (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Ni sur $\mathbb{R}_+^*$ car, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > a$, $0 \leq |1 - f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$ qui est un majorant. D'où $0 \leq \sup_{x\in[a,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+na}$ car le *sup* est le plus petit majotant. Or $\frac{1}{1+na} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+n}{1+nx}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. Vers quelle fonction f ?
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau des variations de la fonction $f - f_n$.
3. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

---

1. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \operatorname{Arctan}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

   Si $x > 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$.

   Donc, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$ et cette fonction f est continue.
2. La fonction $g_n = f - f_n$ est dérivable et, pour tout $x \geq 0$:

   $$g_n(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+nx}{x+n}\right) - \operatorname{Arctan}(x) \quad \text{et} \quad g_n'(x) = /\cdots/ = \frac{-2(1+2nx+x^2)}{[(x+n)^2 + (1+nx)^2]\,(1+x^2)} \leq 0,$$

   d'où le tableau des variations :

x	0		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	
$g_n(x)$	$\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$	$\searrow$	$-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$

3. D'où $\sup_{x\in[0,+\infty[} |g_n(x)| = \max\left(\left|\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}\right|, \left|-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}\right|\right) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f.

Exercice 5. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, de deux manières : en utilisant la question précédente et sans l'utiliser.
4. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

---

1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n 2^n x^2} \sim \dfrac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2^n t}{1 + n 2^n t^2}\, dt = \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{2n 2^n t}{1 + n 2^n t^2}\, dt = \frac{1}{2n} \int_0^{n2^n} \frac{du}{1+u}$

   après le CDV $u = n2^n t^2$ ($du = 2n2^n t dt$). La fonction $t \mapsto n2^n t^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$. D'où $I_n = \dfrac{1}{2n} \left[\ln(1+u)\right]_0^{n2^n}$.

   Donc $I_n = \dfrac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \dfrac{\ln(n2^n) + \ln(1+\frac{1}{n2^n})}{2n} = \dfrac{n\ln 2 + \ln n + \ln(1+\frac{1}{n2^n})}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln 2}{2}$.
3. Par l'absurde : si (f_n) converge uniformément vers 0 (la fonction nulle), alors $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt = \frac{\ln 2}{2}$ est égal à $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt = 0$. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

   Autre méthode — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$ et $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{2^n \frac{1}{n}}{1+2^n \frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞. Or $\sup\limits_{[0,1]} |f_n - f| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$, d'où $\sup\limits_{[0,1]} |f_n - f|$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞. Donc la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2} - 0\right| \leq \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} \leq \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$, qui est un majorant.

   D'où $0 \leq \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{na}$ car le *sup* est le plus petit majorant.

   Donc la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers 0 (la fonction nulle).

Exercice 6. Soit la suite des réels $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\, \mathrm{d}x$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge.
2. Déterminer une relation entre u_{n-1} et u_{n+1}. En déduire la limite de (u_n).
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de la convergence dominée.

---

1. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan x \leq 1$, d'où $0 \leq \tan^{n+1} x \leq \tan^n x$.

   D'où (croissance de l'intégrale) : $0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x\, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, \mathrm{d}x$. D'où la suite (u_n) est décroissante. Et minorée par 0. Donc la suite (u_n) est convergente.
2. $u_{n-1} + u_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x \cdot \left(1 + \tan^2 x\right)\, \mathrm{d}x$. Or $1 + \tan^2 x = \tan' x$.

   D'où $u_{n-1} + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}(x) \cdot \tan'(x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\tan^n(x)}{n}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n}$.

   Notons ℓ la limite de u_n (on sait que cette limite existe et est réelle car la suite (u_n) converge). L'égalité $u_{n-1} + u_{n+1} = \frac{1}{n}$ passe à la limite et devient : $\ell + \ell = 0$. Donc $\lim u_n = 0$.

3. On utilise le théorème de la convergence dominée :

   * Chaque fonction $f_n : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan^n(x)$ est continue par morceaux (et même continue).

   ** f_n converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq \pi/4 \\ 1 \text{ si } x = \pi/4 \end{cases}$, continue par morceaux.

   *** $\forall x \in [0, \pi/4],\ |f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 1\, dx$ converge.

   D'où $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx = 0$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 7 (convergence dominée)**.**

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$
est une intégrale convergente.
2. Montrer que la suite des fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.

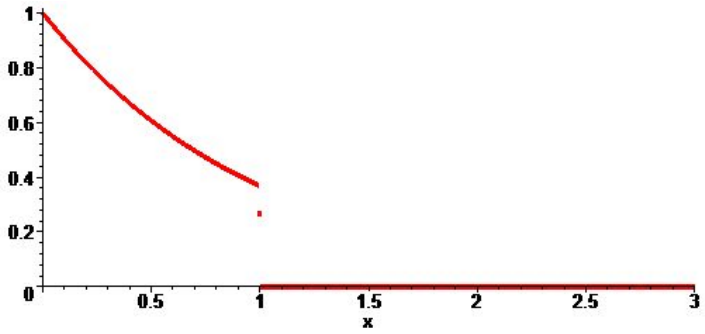


FIGURE 1 – LA LIMITE f DE LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : [0, +\infty[\to, \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

3. Montrer que la suite (v_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

---

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\to, \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$.

   $\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx$ converge, d'où l'intégrale impropre $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge.

2. Soit $x \in [0, +\infty[: f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x \in [0, 1[\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. Donc la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction
$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x \in [0, 1[,\ \frac{1}{1+\mathrm{e}} \text{ si } x = 1 \text{ et } 0 \text{ si } x > 1$$
représentée sur la figure 1.
3. On utilise le théorème de la convergence dominée :

   * Chaque fonction f_n est continue par morceaux.

   ** f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f, continue par morceaux.

*** $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ (qui ne dépend pas de n) et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ converge.

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 8. Soit une suite de fonctions $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0,1[$ vers une fonction f. On suppose que :

1. chaque fonction f_n est croissante. Montrer que f l'est aussi.
2. chaque fonction f_n est bornée. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?
3. chaque fonction f_n est polynomiale. Montrer que f ne l'est pas nécessairement. Et si la convergence est uniforme ?

On note $a = 0$ et $b = 1$.

1. Soient deux réels x_1 et x_2 de $]a,b[$ tels que $x_1 \leq x_2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante, d'où les réels $u_n = f_n(x_1)$ et $v_n = f_n(x_2)$ sont tels que $u_n \leq v_n$. Or $\lim u_n = f(x_1)$ et $\lim v_n = f(x_2)$ car f_n converge simplement vers f. Les inégalités larges passent à la limite, d'où $\lim u_n \leq \lim v_n$. D'où $f(x_1) \leq f(x_2)$. Donc la fonction f est croissante.
2. La fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{(x-a)(b-x)}$ n'est pas bornée. Mais c'est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions $f_n :]a,b[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ qui sont bornées.

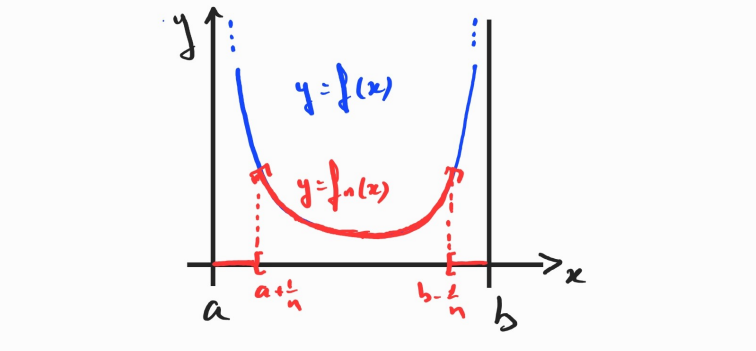


FIGURE 2 – UNE SUITE DE FONCTIONS BORNÉES QUI CONVERGE SIMPLEMENT VERS UNE FONCTION NON BORNÉE.

Et si la convergence est uniforme, alors $\sup\limits_{x\in]a,b[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{x\in]a,b[} |f_N(x) - f(x)| \leq 1$. Or, pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) = f(x) - f_N(x) + f_N(x)$, d'où $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M$, où M est un majorant de la fonction $|f_N|$ (un tel majorant existe car la fonction f_N est bornée). Donc la fonction f est bornée.

3. La suite des fonctions $P_n :]0,1[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1-t}$ car $\forall t \in]0,1[,\ P_n(t) = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-t}$. Chaque fonction P_n est polynomiale mais la fonction f ne l'est pas.

   Et si la convergnce est uniforme ? Non plus, car voici un contre-exemple. La suite des fonctions $Q_n :]0,1[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (t/2)^k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{1-(t/2)}$. Chaque fonction Q_n est polynomiale mais la fonction g ne l'est pas.

   Pourtant, la convergence est uniforme sur $]0,1[$ car : $\forall t \in]0,1[, |Q_n(t) - g(t)| = \left|\frac{(t/2)^{n+1}}{1-(t/2)}\right| \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1/2}$ qui est un majorant. d'où $\sup\limits_{t\in]0,1[} |Q_n(t) - g(t)| \leq \dfrac{1}{2^n}$ car le *sup* est le plus petit majorant. D'après le théo. des gendarmes, ce *sup* tend vers 0.

   AUTRE MÉTHODE : soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non polynomiale (par exemple, cos). D'après le théorème de Weierstrass, c'est la limite uniforme d'une suite de polynômes P_n sur le segment $[0,1]$, et donc *a fortiori* aussi sur $]0,1[$.

Exercice 9. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. La fonction f a-t-elle nécessairement une limite en $+\infty$?
2. Montrer que, si la limite existe, alors elle est nécessairement nulle.
3. Montrer que, si f est uniformément continue, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

1. Voir un contre-exemple sur la figure et la ▷ **remarque 7 du chapitre III**.

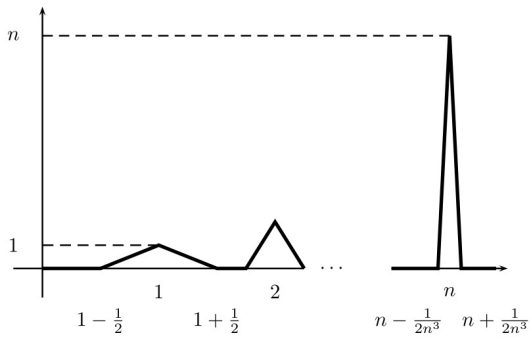


FIGURE 3 – Pas de divergence grossière pour les intégrales généralisées

2. Raisonnons par l'absurde et montrons que si la limite est non nulle, l'intégrale ne peut pas converger absolument.

   PREMIER CAS : si la limite est finie. Soit $\ell \neq 0$ la limite de f. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

   $$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

   On en déduit que :

   $$\int_{x_0}^{x} f(x)dx \geq \int_{x_0}^{x} \frac{\ell}{2}dx = \frac{\ell}{2}(x - x_0) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$

   et donc l'intégrale ne peut pas converger.

   SECOND CAS : si la limite vaut $\pm\infty$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

   $$\forall x \geq x_0, \quad f(x) \geq 17.$$

   Et on conclut comme dans le premier cas.
3. Une nouvelle fois, raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x)$ ne tend pas vers 0 et que f est uniformément continue. Montrons que l'intégrale diverge. La fonction ne tend pas vers 0 , d'où : il existe un réel $\varepsilon > 0$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) > \epsilon.$$

   Par la continuité uniforme, pour cet epsilon :

   $$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x_n - x| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{d'où } |f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

   On peut ensuite extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > u_{n-1} + \alpha.$$

   Finalement :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{u_n + \frac{\alpha}{2}} f(x)dx \geq n\alpha\frac{\epsilon}{2} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

   L'intégrale ne peut donc pas converger.