Colle n° 05

Réduction

Exercice 1 (Diagonaliser la transposée)**.** Soient A et P deux matrices de $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : si une matrice P est inversible, alors sa transposée P^T l'est aussi. Exprimer $(P^T)^{-1}$ en fonction de P^{-1}.
2. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que A^T l'est aussi.
   (b) Comparer les spectres et les dimensions des sous-espaces propres de A et de A^T.
   (c) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On note C_j la $j-$ème colonne de P et $X_j = (P^T)^{-1} \cdot P^{-1} \cdot C_j$. Calculer $A^T X_j$ et en déduire une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A^T.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A l'est.
2. (a) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A + I_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que, si C est diagonalisable, alors A l'est.
   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer que C est diagonalisable si, et seulement si, $-1 \notin \text{Sp}(A)$.