Corrigé de la colle n° 05

Réduction

15 novembre 2026

Exercice 1 (Diagonaliser la transposée)**.** Soient A et P deux matrices de $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que : si une matrice P est inversible, alors sa transposée ${}^tP$ l'est aussi. Exprimer $({}^tP)^{-1}$ en fonction de P^{-1}.
2. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que ${}^tA$ l'est aussi.
   (b) Comparer les spectres et les dimensions des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$.
   (c) Soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}\cdot A\cdot P=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. On note C_j la $j-$ème colonne de P et $X_j={}^tP^{-1}\cdot P^{-1}\cdot C_j$. Calculer ${}^tAX_j$ et en déduire une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de ${}^tA$.

---

1. En transposant $P\cdot P^{-1}=P^{-1}\cdot P=I_n$, on obtient : $(P^{-1})^T\cdot P^T=P^T\cdot(P^{-1})^T=I_n$, donc P^T est inversible et son inverse $(P^T)^{-1}$ est $(P^{-1})^T$.
2. En transposant $D=P^{-1}AP$, on obtient : $D^T=P^TA^T(P^{-1})^T$. Or $D^T=D$ car D est diagonale et $P^TA^T(P^T)^{-1}$ car $(P^T)^{-1}=(P^{-1})^T$. D'où $D=P^TA^T(P^T)^{-1}$. Donc A^T est diagonalisable. De plus, A et A^T ont les mêmes valeurs propres car celles-ci sont les éléments diagonaux de la même matrice D. Enfin, les *sep* de A et de A^T ont les mêmes dimensions car la dimension de $SEP(\lambda)$ est égale au nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale de D.
3. Remarquons que $P^{-1}C_j$ est égal à E_j, le j−ème vecteur colonne de la base canonique de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Puis calculons : ${}^tAX_j={}^tA\left({}^tP^{-1}P^{-1}C_j\right)=\left({}^tP^{-1}{}^tP\right)\left({}^tA{}^tP^{-1}P^{-1}C_j\right)={}^tP^{-1}\left({}^tP{}^tA{}^tP^{-1}\right)\left(P^{-1}C_j\right)={}^tP^{-1}DE_j={}^tP^{-1}\lambda_jE_j=\lambda_j{}^tP^{-1}E_j=\lambda_j{}^tP^{-1}P^{-1}C_j=\lambda_jX_j$. Les n vecteurs X_j sont donc des vecteurs propres de la matrice ${}^tA$.

   Par ailleurs, ces n vecteurs sont libres car ce sont les images, par la matrice inversible ${}^tP^{-1}P^{-1}$, des vecteurs C_j qui sont libres. Ils forment donc une base de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Exercice 2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la matrice $B=\begin{pmatrix}0_n & A\\ A & 0_n\end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A l'est.
2. (a) Montrer que la matrice $C=\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ A & A\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}0_n & I_n\\ 0_n & A+I_n\end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que, si C est diagonalisable, alors A l'est.
   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer que C est diagonalisable si, et seulement si, $-1\notin\mathrm{Sp}(A)$.

Voir aussi le corrigé de Louise.

1. La matrice $P=\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}$ est inversible (son inverse est $\frac{1}{2}P$) et $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}A & 0_n\\ 0_n & -A\end{pmatrix}=B'$ est donc semblable à B.

   Si A est diagonalisable, alors il existe $Q\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ=D$ est diagonale. La matrice $R=\begin{pmatrix}Q & 0_n\\ 0_n & Q\end{pmatrix}$ est alors inversible (son inverse est $\begin{pmatrix}Q^{-1} & 0_n\\ 0_n & Q^{-1}\end{pmatrix}$) et $R^{-1}B'R=\begin{pmatrix}D & 0_n\\ 0_n & D\end{pmatrix}$ est diagonale, ce qui prouve que la matrice B est diagonalisable.

   Si B est diagonalisable, alors il en est de même de B'. Il existe donc un polynôme Π annulateur de B' et scindé à racines simples. Or $\Pi(B')=\begin{pmatrix}\Pi(A) & 0_n\\ 0_n & \Pi(-A)\end{pmatrix}$, d'où $\Pi(A)=0_n$, d'où le polynôme Π est annulateur de A et est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

2. (a) La matrice $P = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ est inversible (son inverse est $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$) et $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A+I_n \end{pmatrix} = C'$ est donc semblable à C.

(b) S la matrice C est diagonalisable, alors elle possède un polynôme annulateur Π scindé à racines simples. Or $\Pi(C') = \begin{pmatrix} 0_n & \star \\ 0_n & \Pi(A+I_n) \end{pmatrix}$. D'où $\Pi(A+I_n) = 0_n$. Le polynôme Π est ainsi annulateur de $A+I_n$ et est scindé à racines simples, d'où $A+I_n$ est diagonalisable, donc A l'est aussi.

(c) Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ = D$ est diagonale car A est supposée diagonalisable. La matrice $R = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}$ est alors inversible (son inverse est $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & Q^{-1} \end{pmatrix}$) et $R^{-1}C'R = \begin{pmatrix} 0_n & \star \\ 0_n & D+I_n \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de C est donc $\chi_C(X) = X^n\,\chi_{D+I_n}(X)$ et, par suite, $\mathrm{Sp}(C) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(D+I_n)$.

D'une part $\mathrm{rg}(C) = n$ car, d'après la question 2a, la matrice C est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A+I_n \end{pmatrix}$ qui possède exactement n colonnes linéairement indépendantes. D'après le théorème du rang, $\dim E_0(C)$ est donc égal à $2n - \mathrm{rg}(C) = n$. D'autre part :

— si $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(D+I_n)$, d'où la multiplicité m_0 de la racine 0 dans le polynôme caractéristique $\chi_C(X)$ est supérieure à $n+1$, d'où $m_0 > \dim E_0(C)$, donc la matrice C n'est pas diagonalisable ;

— si $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(D+I_n)$, d'où $\dim E_0(C) + \sum_{\lambda \neq 0} \dim E_\lambda(C) = n$, donc la matrice C est diagonalisable.

♡ Plus généralement (même si la matrice A n'est pas diagonalisable) :

* $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$ car $\chi_A = \chi_{A^T}$;

** $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^T)$ car $\mathrm{rg}(\lambda I_n - A) = \mathrm{rg}(\lambda I_n - A)^T$.

Colle 5 - Exercice 2

1) On suppose B diagonalisable.
Il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que

$$P(B)=0$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$\forall i \in [\![0,d]\!]$, $B^i \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i X \\ A^i X \end{pmatrix}$

Donc $P(B)\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A)X \\ P(A)X \end{pmatrix}$

Or $P(B)\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = 0$

Donc

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), P(A)X = 0$

Donc $P(A) = 0_n$

Donc P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples
Donc A est diagonalisable

On suppose A diagonalisable
$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $D = P^{-1}AP$ avec D diagonale

On pose

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$Q^{-1} B Q = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$

$$S^{-1} = S$$

$$S^{-1} Q^{-1} B Q S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$$

Donc **B est diagonalisable**

2)a) On pose $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$$

$$P C P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & A+I_n \end{pmatrix}$$

Donc **C est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & A+I_n \end{pmatrix}$**

b) On note $\Pi = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A+I_n \end{pmatrix}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \Pi^k = \begin{pmatrix} 0_n & * \\ 0_n & (A+I_n)^k \end{pmatrix}$$

On suppose C diagonalisable donc Π l'est aussi
Donc il existe un polynôme annulateur P scindé à racines simples.

$$P(\Pi) = \begin{pmatrix} 0_n & * \\ 0_n & P(A+I_n) \end{pmatrix}$$

Or $P(\Pi) = 0$
donc $P(A+I_n) = 0$

Scanné avec CamScanner

Colle 4 - Exercice 2 - Suite

Donc $A + I_m$ est diagonalisable

Donc **A est diagonalisable**

c) On suppose A diagonalisable

Donc

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Donc N est semblable à $N = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & D + I_m \end{pmatrix}$

Donc $N = \begin{pmatrix} (0) & 1 & & (0) \\ & (0) & \ddots & \\ & & \lambda_1 + 1 & (0) \\ (0) & & & \lambda_m + 1 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme d'un ev E représenté dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2m})$ par la matrice N,

$\forall i \in [\![1, m]\!]$, $[g]_{(e_i, e_{m+i})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda_i + 1 \end{pmatrix}$ en notant $g = f|_{\mathrm{Vect}(e_i, e_{m+i})}$

En réordonnant la base $\mathcal{B}$,

$B' = [f] = \mathrm{diag}(B_1, \dots B_m)$ où $B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda_i + 1 \end{pmatrix}$

la matrice B' est diagonalisable ssi. tous ses blocs diagonaux sont diagonalisables.

Or, soit $i \in [\![1, m]\!]$,

$\chi_{B_i} = X(X - \lambda_i - 1)$

Si $\lambda_i \neq -1$ alors B_i est diagonalisable

Si $\lambda_i = -1$ alors $\chi_{B_i} = X^2$

Scanné avec CamScanner

Par l'absurde B n'est pas diagonalisable car sinon ce serait la matrice nulle.

Donc B est diagonalisable ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq -1$

Donc $\boxed{C \text{ diagonalisable} \iff -1 \notin Sp(A)}$

Scanné avec CamScanner