Kdo du 16/11/2026

Suites de fonctions

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geqslant f(x).$$
3. Soit un réel $A > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, A]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \exp\left(\frac{A^2}{2n}\right) - 1$.
   (b) Qu'en déduire ?
4. Montrer que chaque fonction f_n est décroissante.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :
$$\forall n \geq N,\ \forall x \geq A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
6. Qu'en déduire ?
7. Montrer que la suite des réels $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est bien définie et étudier son éventuelle limlite.