Chapitre VII Séries de fonctions

Table des matières

VII.1 Trois manières de converger 59
VII.1.1 Convergence simple et convergence uniforme 59
VII.1.2 Convergence normale 60
VII.2 Continuité 61
VII.3 Intégrer 61
VII.4 Dériver 62

VII.1 Trois manières de converger

VII.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 1

Soit une suite de fonctions f_n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est appelée *la somme partielle d'ordre* n. Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et S une fonction. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$:

1. **converge simplement** sur I vers S si la série de réels $\sum f_n(x)$ converge pour chaque $x \in I$. Autrement dit, si la suite des fonctions S_n converge simplement sur I vers la fonction S :
$$\forall x \in I, \quad |S_n(x) - S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. **converge uniformément** sur I vers S si la suite des fonctions S_n converge uniformément sur I vers la fonction S :
$$\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque 2 — *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S, alors :*

1. *la fonction S est définie sur I et, pour chaque $x \in I$, $\quad S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$;*
2. *la fonction $R_n = S - S_n$, appelée* le reste d'ordre n, *est définie sur I et*
$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \ ;$$
3. *la suite de fonctions R_n converge simplement sur I vers 0 (la fonction nulle).*

Méthode 3 — *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers la fonction S*

$\iff$ *la suite de fonctions R_n converge uniformément sur I vers 0 ;*

$\implies$ *la suite de fonctions f_n converge uniformément sur I vers 0.*

Preuve — ($\Longleftrightarrow$) Par définition, la suite $R_n = S - S_n$ converge uniformément vers 0 si, et seulement si, la suite S_n converge uniformément vers S.

($\Longrightarrow$) $f_n = R_{n-1} - R_n$, d'où : pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq |R_{n-1}(x)| + |R_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |R_{n-1}(x)| + \sup_{x\in I} |R_n(x)|$, d'où $\sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |R_{n-1}(x)| + \sup_{x\in I} |R_n(x)|$. Or on vient de montrer que la suite de fonctions R_n converge uniformément vers 0. Donc la suite de fonctions f_n aussi. □

EXERCICE 4 — *Soit $f_n(x) = x^n$. Montrer que :*

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,+1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$;*
2. *elle ne converge pas uniformément sur $]-1,+1[$;*
3. *elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1,+1[$.*

VII.1.2 Convergence normale

DÉFINITION 5
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I s'il existe une suite de réels u_n tels que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq u_n \\ \text{et la série de réels } \sum u_n \text{ converge.} \end{cases}$$

REMARQUE 6 — *La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, la série de réels $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ converge.*

PROPOSITION 7
convergence normale $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **convergence uniforme** $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **convergence simple**

Preuve — On sait déjà que : convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple.

Montrons que : convergence normale $\Longrightarrow$ convergence uniforme.

Soit $x \in I$: $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. (Toutes ces séries convergent car il y a convergence normale.) D'où $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq r_n$, où $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est le reste de la série convergente $\sum u_k$. D'où $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc (méthode 3) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Les réciproques sont fausses : d'après l'exercice 4, convergence uniforme $\not\Longleftarrow$ convergence simple. Et d'après l'exercice 8, convergence normale $\not\Longleftarrow$ convergence uniforme. □

EXERCICE 8 — *Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

Montrer que :

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*
3. *elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

VII.2 Continuité

Théorème 9
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue en a. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue en a.

Preuve — Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ la somme partielle d'ordre n. La suite de fonctions S_n converge uniformément sur I vers S et, pour chaque n, la fonction S_n est continue en a, d'où (théorème V.6) la fonction S est continue en a. □

Corollaire 10
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue sur I.

Exercice 11 — *Soit la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$. Montrer qu'elle converge simplement sur $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?*

Théorème 12 (**de la double limite** ou **d'interversion somme-limite**)
Soient une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I et a une extrémité (éventuellement infinie) de cet intervalle. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la série de réels $\sum b_n$ converge et $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Preuve — Appliquer le théorème V.9 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. □

Exercice 13 (suite de l'exercice 8) — *Soit la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Montrer (de deux manières) que : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

VII.3 Intégrer

L'objectif du théorème suivant est d'intégrer terme à terme une série de fonctions, autrement dit d'intervertir $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_a^b$.

Théorème 14 (**d'intégration terme à terme sur un segment**)
Soient un segment $[a,b]$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue sur le segment $[a,b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Preuve — Appliquer le théorème V.10 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. □

EXERCICE 15 — *Montrer que, pour tout* $x \in]-1,+1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Il existe un autre théorème d'intégration terme à terme (que nous admettrons), qui ne réclame ni que la convergence soit uniforme ni que l'intervalle soit un segment :

THÉORÈME 16 (**d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque**)
Soient un intervalle I et une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Si :

1. la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S *cpm* sur I ;
2. la série de réels $\sum \int_I |f_n(t)|\,dt$ converge ;

alors S est intégrable sur I et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I S(t)\,dt$.

EXERCICE 17 — *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx$ *est convergente et qu'elle vaut* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

VII.4 DÉRIVER

L'objectif du théorème suivant est de dériver terme à terme une série de fonctions, autrement dit d'intervertir $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\frac{d}{dx}$.

THÉORÈME 18 (**de dérivation terme à terme**)
Soient un segment $[a,b]$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Si :

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction S ;
(ii) la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$;

alors la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

Preuve — Appliquer le théorème V.15 à la suite des sommes partielles S_n. □

COROLLAIRE 19
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit une suite de fonctions f_n de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. Si :

(i) pour chaque $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
(ii) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ;

alors la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $\forall j \in [\![0,k]\!],\ \forall x \in I,\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(x)$.