# Feuille de T.D. n° 6

*Dénombrement & probabilités*

**Exercice 1** (Dénombrement)**.**

Démontrer les formules suivantes :

1. $$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
   (de deux manières : formule du binôme et dénombrement)
2. La petite formule
   $$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
3. Calculer, de deux manières (en utilisant la « petite formule » ou en dérivant), $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} \mathrm{Card}(X)$
4. La formule de Vandermonde
   $$\sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n} \text{ et, en particulier, } \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$
   (de deux manières : développement de $(1+X)^{a+b}$ et dénombrement)
5. $$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
   (de deux manières : télescope et dénombrement).

**Exercice 2** (La formule d'inversion de Pascal)**.**

1. Montrer que la matrice
   $$T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & & & & \binom{n-1}{n-1} & 0 \\ \binom{n}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,n+1}$$
   du triangle de Pascal définie par $T_{ij} = \binom{i}{j}$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geq n$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, en posant $S_{p,0} = 0$. Montrer que $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$ et en déduire que $S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^p$.
3. Un *dérangement* est, par définition, une permutation sans point fixe. On pose $D_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n$ le nombre de dérangements de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Étudier $\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!}$.

**Exercice 3** (Indépendance)**.** Soient $A$ et $B$ deux événements et les probabilités

$$x = P(A \cap B), \quad y = P(A \cap \bar{B}), \quad z = P(\bar{A} \cap B), \quad t = P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

1. Calculer $x + y + z + t$.
2. Calculer $P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)$ en fonction de $x$, $y$, $z$ et $t$.

   En déduire que : $A$ et $B$ sont indépendants si, et seulement si,
   $$P(A \cap B) \times P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) \times P(\bar{A} \cap B).$$
3. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ u \cdot (1-u) \leq \frac{1}{4}$.

   En déduire que : $|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

**Exercice 4** (Équiprobabilité)**.** Soit $n \geq 3$. Les boules d'une urne sont numérotées de 1 à $n$. On tire toutes les boules au hasard, l'une après l'autre, sans les remettre dans l'urne.

1. Quel est l'univers ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre et consécutivement ?
3. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?

**Exercice 5** (Formule des probabilités totales & suite arithmético-géométrique)**.** On étudie le fonctionnement d'une machine à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, sachant que :

— si elle marche à l'instant $n$, elle tombe en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité $a$ ;

— si elle est en panne à l'instant $n$, elle est encore en panne à l'instant $n+1$ avec une probabilité $b$.

On suppose que $|b-a| \neq 1$ et on note $u_n$ la probabilité que la machine marche à l'instant $n$.

1. Déterminer une relation entre $u_{n+1}$ et $u_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$, de $u_0$, de $b$ et de $a$.
3. Etudier la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 6** (Formule des probabilités totales & matrice stochastique)**.**

Un mobile se déplace sur un triangle $ABC$. À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la position du mobile est $A$ (avec la probabilité $a_n$), $B$ (avec la probabilité $b_n$), ou $C$ (avec la probabilité $c_n$). Entre deux instants $n$ et $n+1$, le mobile change de position et se dirige de manière équiprobable vers une des deux autres positions. On suppose que, à l'instant 0, le mobile est situé à un sommet.

Exprimer matriciellement $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ en fonction de $(a_n, b_n, c_n)$. Étudier les limites de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ quand $n$ tend vers l'infini. Dépendent-elles de la position initiale du mobile ? ▷ **exo 9 du TD 4**

**Exercice 7** (Formule de Bayes)**.** Une boîte contient des dés à 6 faces : une proportion $1-p \neq 0$ de dés honnêtes et une proportion $p \neq 0$ de dés malhonnêtes. Quand on lance un dé malhonnête, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans la boîte et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit malhonnête ?
3. On prend un dé au hasard dans la boîte, on le lance $n$ fois et on obtient un 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité $u_n$ que le dé soit malhonnête ?
4. Etudier la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 8** (Formule des probabilités composées – *Oral Mines Ponts PC 2016*)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires.

1. On tire deux boules de l'urne simultanément.

   Soit $S_1$ l'événement : « On tire une boule blanche et une boule noire de l'urne ». Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité de $S_1$.
2. On tire toutes les boules de l'urne (sans remise), deux par deux.

   Montrer que la probabilité d'obtenir, à chaque tirage, une boule blanche et une boule noire vaut $\dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

**Exercice 9** (Loi du 0-1 de Borel – *Oral Mines Ponts PC 2019*)**.**

On lance indéfiniment un dé équilibré.

1. Soit $A_n$ l'événement « aucun 6 n'a été obtenu lors des $n$ premiers lancers ». Déterminer $P(A_n)$.
2. Soit $F_k$ l'événement « le premier 6 est obtenu au $k$-ième lancer ». Déterminer $P(F_k)$.
3. Soit $K$ l'événement « 6 n'apparaît jamais ». Exprimer $K$ à l'aide des $A_n$. En déduire $P(K)$.
4. Exprimer $K$ en fonction des $F_k$. Retrouver la valeur de $P(K)$.
5. Soient $G$ l'événement « 6 apparaît une infinité de fois » et $H$ l'événement « 6 apparaît à tous les lancers sauf un nombre fini d'entre eux ». Calculer $P(G)$ et $P(H)$.

---

**Et aussi :** les exercices 101,105,107,112 de la banque CCINP.