# Corrigé du Kdo du 16/11/2026

*Suites de fonctions*

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction $f$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geqslant f(x).$$
3. Soit un réel $A > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, A]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \exp\left(\frac{A^2}{2n}\right) - 1$.
   (b) Qu'en déduire ?
4. Montrer que chaque fonction $f_n$ est décroissante.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que :
$$\forall n \geq N,\ \forall x \geq A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
6. Qu'en déduire ?
7. Montrer que la suite des réels $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est bien définie et étudier sa limlite.

---

1. On étudie les variations des deux fonctions dérivables
$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto t - \ln(1+t) \qquad \text{et} \quad h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}.$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t} \geq 0.$$
Elles sont donc croissantes sur $\mathbb{R}_+$, or elles sont nulles en 0, donc elles sont positives sur $\mathbb{R}_+$ :

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ t - \tfrac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.}$$

Autre méthode — La **concavité** de la fonction ln suffit en fait à montrer que : $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leq t$.

2. Soit $x \geq 0$ : $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \exp\left[-n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]$. Quand $n$ tend vers $\infty$, $\frac{x}{n}$ tend vers 0.
Or (développement limité) : $\ln(1 + \frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n}\varepsilon(\frac{x}{n})$. D'où $-n\ln(1 + \frac{x}{n}) = -x - x\varepsilon(\frac{x}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -x$.
D'où (par continuité de exp) : $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x}$.

Donc la suite des fonctions $f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

De plus, pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$ (d'après la question 1) , d'où : pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $-n\ln(1+\frac{x}{n}) \geq -n\frac{x}{n}$,

donc (par croissance de exp) : $\forall x \geq 0,\ f_n(x) \geq f(x)$.

3. (a) D'après la question 1, pour tous $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x+\frac{x^2}{2n}}$.

D'où, pour tout $x \in [0,A]$, $f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}}$.

On en déduit que : $f_n(x) - f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\left[\mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}} - 1\right] \leq \mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}} - 1$.

De plus, $0 \leq f_n(x) - f(x)$ d'après la question 2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,A],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}} - 1$.

(b) De la majoration précédente, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{[0,A]} |f_n - f| \leq \mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}} - 1$.

Or $\mathrm{e}^{\frac{A^2}{2n}} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup\limits_{[0,A]} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite des fonctions $f_n$ converge uniformément sur $[0,A]$ vers la fonction $f$.

4. Chaque fonction $f_n$ est dérivable et, pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = -n(1+\frac{x}{n})^{-n-1} \cdot \frac{1}{n} \leq 0$.

Donc chaque fonction $f_n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [A, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}| &= f_n(x) - \mathrm{e}^{-x} \\ &\leq f_n(A) - \mathrm{e}^{-x} \text{ (d'après la question 4)} \\ &\leq f_n(A) - \mathrm{e}^{-A} + \mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ :

— si $A$ est assez grand, alors $\mathrm{e}^{-A} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ;

— si $n$ est assez grand, alors $|f_n(A) - \mathrm{e}^{-A}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (car $f_n$ converge simplement vers $f$).

Donc $\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \exists N_A \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N_A,\ \forall x \geq A,\ |f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}| \leq \varepsilon$.

6. On a montré que, pour tout $A$, la suite des fonctions $f_n$ converge uniformément sur $[0,A]$ vers $f$, d'où :

$$\exists N' \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N',\ \forall x \in [0,A],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Choisissons le $A$ et le $N$ de la question 5 et posons $N'' = \max(N, N')$. Alors

$$\forall n \geq N'',\ \forall x \in [0,A] \cup [A, +\infty[,\ |f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite des fonctions $f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers $f$.

7. Soit $n \geq 2$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $b \geq 0$ :

$$\int_0^b \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \left[\frac{n}{-n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n+1}\right]_0^b \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{n}{n-1}.$$

Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ est convergente et vaut $\frac{n}{n-1}$. et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{n}{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.