Colle n° 06

Suites de fonctions

Exercice 1.

1. (a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\, dx$ est convergente.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\, dx$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\, dt$.
   (c) En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^n}\, dx$.
   (b) Soit, plus généralement, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n)\, dx$.

Exercice 2. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(1) \neq 0$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b], \quad f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[a,b]$. Vers quelle fonction ? Cette convergence est-elle uniforme sur $[a,b]$?
2. Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\, \mathrm{d}t.$$
3. Montrer que :
$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t)\, \mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n} f(1).$$