Corrigé du Kdo du 23/11/2026

Probabilités

Cet exercice porte sur **la loi du zéro-un de Borel**.

▷ **L'exercice 9 du T.D. n° 6** en est un cas particulier.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Soit F l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ tels que ω appartient à une infinité de E_n.

1. Montrer que $F = \bigcap_{n\geq 0} \left(\bigcup_{k\geq n} E_k \right)$.
2. L'ensemble F est-il un événement ?
3. Que peut-on dire de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des événements définis par $A_n = \bigcup_{k\geq n} E_k$?
4. On suppose que la série $\sum P(E_n)$ converge.

   Montrer que $\boxed{P(F) = 0}$.
5. On suppose, dans cette question, que $\left(\overline{E_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants et que la série $\sum P(E_n)$ diverge.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $N \geq n$,
   $$\ln\left(P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p} \right) \right) \leq -\sum_{p=n}^{N} P(E_p).$$
   (b) En déduire la limite, quand $N \to \infty$, de $P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p} \right)$.
   (c) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,
   $$P\left(\bigcap_{p\geq n} \overline{E_p} \right) = 0.$$
   (d) Conclure que $\boxed{P(F) = 1}$.

1. Soit $\omega \in \Omega$:

$$\begin{array}{rcl} \omega \in F & \Leftrightarrow & \omega \text{ appartient à une infinité de } E_k \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, k \geq n,\ \ \omega \in E_k \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \ \omega \in \bigcup_{k\geq n} E_k \\ & \Leftrightarrow & \omega \in \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} E_k \end{array}$$

2. F est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements. Les tribus sont stables par unions et intersections, finies ou dénombrables. Par conséquent, $F \in \mathcal{A}$, autrement dit : F est un événement.
3. $\bigcup_{k\geq n} E_k = (\bigcup_{k\geq n+1} E_k) \bigcup E_n$ d'où $\bigcup_{k\geq n+1} E_k \subset \bigcup_{k\geq n} E_k$

   La suite (A_n) est donc une suite décroissante d'événements.
4. $F = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ et la suite (A_n) est décroissante, d'où (par continuité décroissante) : $P(F) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

   Et par $\sigma-$sous-additivité, pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $P\left(\bigcup\limits_{k\geq n} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(E_k)$ car la série $\sum P(E_k)$ converge par hypothèse.

   Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq P(A_n) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(E_k)$.

   Par hypothèse, la série $\sum P(E_n)$ est convergente. Par conséquent, la suite de ses restes converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k)\right) = 0$$

   On conclut, par le théorème des gendarmes, que : $P(A_n)$ tend vers 0. Donc $P(F) = 0$.
5. (a) Les événements $\overline{E_p}$ étant indépendants, on sait que, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq N$:

$$P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p\right) = \prod_{p=n}^{N} P(\overline{E}_p).$$

   On peut alors écrire :

$$\ln\left(P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p\right)\right) = \sum_{p=n}^{N} \ln\left(P(\overline{E}_p)\right) = \sum_{p=n}^{N} \ln\left(1 - P(E_p)\right) \leq -\sum_{p=n}^{N} P(E_p)$$

   car $\ln(1+x) \leq x$ pour tout réel $x > -1$.

   (b) La série $\sum P(E_n)$ étant divergente, on sait qu'elle tend vers $+\infty$ (car tous les termes sont positifs). Par théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\ln\left(P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p\right)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{d'où} \quad P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p\right) = \exp\left(\ln\left(P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E}_p\right)\right)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $N \geq n$, $\bigcap_{p\geq n} \overline{E_p} \subset \bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}$. Par croissance de la probabilité, on en déduit que $0 \leq P\left(\bigcap_{p\geq n} \overline{E_p}\right) \leq P\left(\bigcap_{p=n}^{N} \overline{E_p}\right)$. Les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$, donc $P\left(\cap_{p\geq n} \overline{E_p}\right) = 0$.

   (d) Une union, finie ou dénombrable, d'événements presque impossibles est encore un événement presque impossible ▷ **corollaire 14**. Or $\overline{F} = \bigcup_{n\geq 0} \left(\bigcap_{p\geq n} \overline{E}_k\right)$ est une union dénombrable d'événements presque impossibles d'après la question précédente.

   D'où $P(\overline{F}) = 0$. Donc $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1$.