Corrigé de la colle n° 07

Suites de fonctions & dénombrement

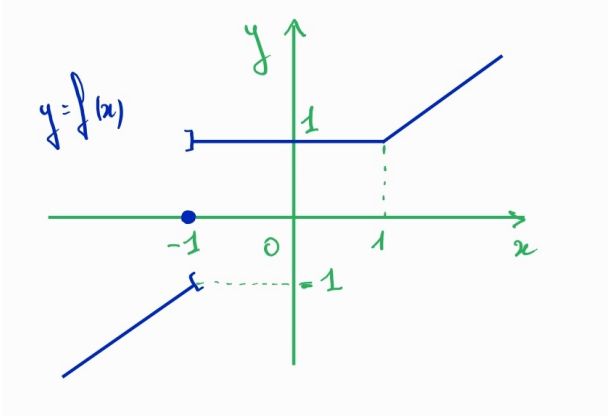
Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x^{2n}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Vers quelle fonction f ? Représenter graphiquement cette fonction f.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$:
$$\frac{x-1}{x^{2n}-1} \leq \frac{1}{2n}.$$
4. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $]1, +\infty[$?
5. Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

---

1. Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x \text{ si } x < -1,\ 0 \text{ si } x = -1,\ 1 \text{ si } -1 < x \leq 1,\ x \text{ si } x > 1.$$



2. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue en -1.
3. Pour tout $x \in]1, +\infty[$,
$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{1+x^{2n}} \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$
4. La question précédente montre que $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$. Or le *sup* est le plus petit majorant. D'où $0 \leq \sup_{]1,+\infty[} |f - f_n| \leq \frac{1}{2n}$. D'après le théorème des gendarmes, $\sup_{]1,+\infty[} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $]1, +\infty[$.

5. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}$$

car $\dfrac{x^{2n}}{1+x+\cdots+x^{2n-1}} = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\frac{1}{x^{2n}} + \frac{x}{x^{2n}} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}}} \text{ sinon} \end{cases}$. Or $\dfrac{1}{2n}$ ne dépend pas de x. D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \leq \dfrac{1}{2n}$ car le *sup* est le plus petit des majorants. De plus, $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sup\limits_{[0,1]} |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

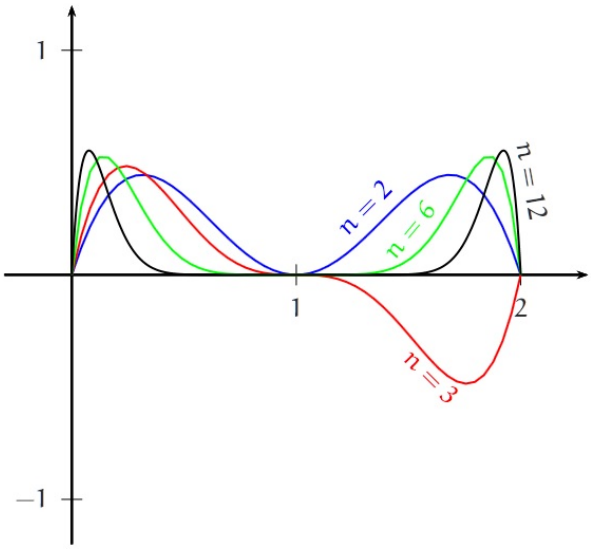


FIGURE 1 – LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : x \mapsto n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,2]$; vers quelle fonction f ?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b, 1+b]$ (où $b \in]0,1[$) inclus dans $]0,2[$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $]0,2[$?
4. Etudier la limite, quand n tend vers ∞, de la suite $\int_0^2 f_n(x)\,dx$.

---

1. Si $x = 0$ ou $x = 2$, alors $f_n(x) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x \in]0,2[$, alors $|f_n(x)| \leq n|1-x|^n = \exp(\ln(n) + n\ln|1-x|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < |1-x| < 1$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0,2]$ vers la fonction nulle $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$.
2. Soit $b \in]0,1[$. Pour tout $x \in [1-b, 1+b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq nb^n$, d'où $\sup\limits_{[1-b,1+b]} |f_n - f| \leq nb^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b, 1+b]$, où $b \in]0,1[$, donc aussi sur tout segment inclus dans $]0,2[$.
3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0,2[$ et $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = n|1-\frac{1}{n}|^n \sin\frac{\pi}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$. D'où $\sup\limits_{]0,2[} |f_n - f|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0,2[$.
4. On vérifie, par le calcul, ce que suggère le graphique : $|f_n(1-t)| = |f_n(1+t)|$ pour tout $t \in]0,1[$. On en déduit que $\sup\limits_{[0,2]} |f_n| = \sup\limits_{[0,1]} |f_n|$. Or, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq n(1-x)^n \frac{\pi}{2} x = g_n(x)$. On étudie les variations de la fonction g_n sur $[0,1]$: son maximum est $g_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n \leq \frac{\pi}{2}$. D'où $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0,2]$. Puis on applique le théorème de la convergence dominée pour montrer que $\int_0^2 f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^2 f(x)\,dx = 0$.

Exercice 3 (Dénombrement)**.**

1. Soient deux entiers $n \geq p \geq 1$. Quel est le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ?
2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![2, n]\!]$. Quel est le nombre de $k-$cycles du groupe symétrique S_n ?

---

1. Construire une injection de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$, c'est :
   - choisir p images dans $[\![1, n]\!]$, il y a $\binom{n}{p}$ manières ;
   - construire une bijection de $[\![1, p]\!]$ vers l'ensemble de ces images, il y a $p!$ manières.

   Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments vaut donc $\binom{n}{p} \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
2. Construire un $k-$cycle du groupe symétrique S_n, c'est :
   - choisir dans $[\![1, n]\!]$ les k éléments dérangés par le cycle, il y a $\binom{n}{k}$ manières ;
   - ordonner ces k éléments dans une $k-$liste, il y a $k!$ manières ;
   - remarquer que chaque cycle est représenté par k listes, on divise donc par k.

   Le nombre de $k-$cycles du groupe symétrique S_n est donc $\binom{n}{k}\frac{k!}{k} = \binom{n}{k}(k-1)!$.