Corrigé de la colle n° 06

Suites de fonctions

27 novembre 2026

Exercice 1.

1. (a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,dx$ est convergente.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,dx$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\,dt$.
   (c) En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^n}\,dx$.
   (b) Soit, plus généralement, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n)\,dx$.

---

1. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$. Or $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Donc l'intégrale u_n est une intégrale convergente.
   (b) On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [1,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Or $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1/\mathrm{e} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. La fonction f est continue et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

   Seconde méthode (en ouvrant l'intervalle en 1) : $\forall x \in]1,+\infty[,\ |f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Or $\forall x > 1,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = 0$. La fonction f est continue par morceaux et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
2. (a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \leq \mathrm{e}^{-x}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Donc l'intégrale A aussi.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le CDV $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1}dx$). La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, d'où : $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\,dt$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1,+\infty[$, on pose $g_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}$.
   (c) On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall t \in [1,+\infty[,\ |g_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente. Or $g_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ car $t^{1-\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{(1-\frac{1}{n})\ln t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ln t} = t$ par continuité de la fonction exp. D'où $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t)\,dt$. D'où $\frac{u_n}{A/n} = \frac{nu_n}{A} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1\,dx$ est convergente. Or $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1/\mathrm{e} \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$. La fonction f est continue par morceaux et $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

   Seconde méthode (en ouvrant l'intervalle en 1) : Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0,1[,\ |f_n(x)| \leq 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1\,dx$ est convergente. Or $\forall x \in [0,1[,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = 1$. La fonction f est continue et $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

(b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $g_n(x) = f(x^n)$. La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc bornée. Soit M un majorant de $|f|$: $\forall x \in [0,1],\ |g_n(x)| \leq M$ (indépendant de n) et $\int_0^1 M\,dx$ est convergente. Or $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x) = \begin{cases} f(1) \text{ si } x = 1 \\ f(0) \text{ si } 0 \leq x < 1 (*) \end{cases}$. La fonction g est continue par morceaux et $\int_0^1 g(x)\,dx = f(0)$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx = f(0)$ d'après le théorème de la convergence dominée

(*) En effet, si $x \in [0,1[$, alors : $n \to \infty \implies x^n \to 0 \implies f(x^n) \to f(0)$ car f est continue par hypothèse.

Exercice 2. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(1) \neq 0$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b], \quad f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[a,b]$. Vers quelle fonction ? Cette convergence est-elle uniforme sur $[a,b]$?
2. Montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que :
$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n} f(1).$$

---

1. Soit $x \in [a,b]$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,1[\text{ car } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} f(1) \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x \in]1,b] \end{cases}$. Cette fonction g n'est pas continue en 1 car $g(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0 \neq g(1)$ car $f(1) \neq 0$ par hypothèse.
2. La suite des fonctions f_n CVS vers la fonction g qui est *cpm*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Donc, d'après le théorème de la convergence dominée, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On calcule l'intégrale :
$$I_n = \int_a^1 t^{n-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
en intégrant par partie, ce que l'hypothèse « f est $\mathcal{C}^1$ » autorise :
$$I_n = \frac{1}{n}\Big[f(t)\ln(1+t^n)\Big]_a^1 - \frac{1}{n}\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)\ln 2}{n} - \frac{f(a)\ln(1+a^n)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \quad (\star)$$
D'une part $|a| < 1$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+a^n) = 0$, donc $\dfrac{f(a)\ln(1+a^n)}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ dans l'égalité $(\star)$. D'autre part la fonction f' est continue sur le segment $[a,1]$, elle y est donc bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in [a,1]$, $|f'(t)| \leq M$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\left|\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^1 \big|f'(t)\big|\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^1 t^n\,\mathrm{d}t = M\frac{1-a^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
en utilisant l'inégalité de convexité $\ln(1+x) \leq x$. D'où, d'après le théorème des gendarmes, $\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $\dfrac{1}{n}\int_a^1 f'(t)\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dans l'égalité $(\star)$. Finalement,
$$I_n = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Puisque $f(1)$ n'edst pas nul par hypothèse (et $\ln 2$ non plus) ,
$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n} f(1).$$