Colle 10 Suite et séries de fonctions

BIHOUEE Inès

Question de cours : Intégration sur un segment de la limite uniforme de fonctions continues.

Exercice 1. Soit la série $\sum \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$.

1. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, la série est-elle convergente ? On désignera désormais par f sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Monter que $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.
4. Montrer que $f'' + f = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \in]0,1], \quad -f'(x) \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{ne^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{ne^{-n}}{1+n^2}.$$

   En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$.

Solution **1.**

1. *La série est noramlement convergente sur* $[A;+\infty[$ *pour tout* $A \in \mathbb{R}$ *car majorée par* $\frac{e^{-A}}{1+n^2}$*). On en déduit que* f *est continue sur* $[A;+\infty[$*, donc sur* $\mathbb{R}$*.*
2. $|f_n(p)(t)| = \left|\frac{n^p}{1+n^2}e^{-nt}\right|$*.* $\sum f_n$ *est noramlement convergente sur* $[A;+\infty[$ *pour tout* $A \in \mathbb{R}_+^*$ *car majorée par* $n^p\frac{e^{-nA}}{1+n^2} = o(e^{-nA/2}$*. On en déduit que* $f^{(p-1)}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *continue sur* $[A;+\infty[$*, donc sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Comme le résultat est valable pour tout* p*,* f *est bien de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*
3. *C'est le théorème d'interversion des limites-séries.*
4. *On calcule* $f_n''(t) + f_n(t) = e^{-nt}$ *et on obtient le résultat en sommant la série de droite étant géométrique.*
5. *Le 4/ monte que* $f'' + f$ *tend vers* $+\infty$*, mais* f *est continue en* 0^+*, donc* $\lim_{O^+} f'' = +\infty$*,* f' *est donc strictement croissante et le théorème des accroissements finis appliqués à* f'' *appliqué à* $[\frac{1}{n}, \alpha]$ *montre qu'il existe une suite* (x_n) *telle que* $f'(x)$ *tend vers* $-\infty$*, d'où la conclusion. On peut aussi utiliser la majoration proposée.*

GRIMAUD Antoine

Question de cours : Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continue.

Exercice 2. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1, 1[$, puis sur $[-a, a]$ avec $0 \leq a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
4. On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Solution **2.** *1. On a :*

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x},$$

et donc la suite converge simplement vers $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *sur* $]-1,1[$. *Posons* $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. *On a :*

$$\varphi_n(x) = -\frac{x^n}{1-x},$$

qui tend vers $-\infty$ *si* x *tend vers 1. D'où* $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$ *et la convergence n'est pas uniforme sur* $]-1,1[$. *Dans le deuxième cas, on vérifie aisément en étudiant* φ_n *que :*

$$\sup_{x\in[-a;a]} |\varphi_n(x)| = \frac{a^n}{1-a},$$

ce qui garantit la convergence uniforme sur $[-a,a]$.

2. *Il est clair que* f_n *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,1]$ *(séparer les cas* $x=0$, $x=1$, $x\in]0,1[$*). D'autre part, on a :*

$$f_n'(x) = -nx^{n-1}(n\ln x + 1),$$

et la dérivée s'annule en $e^{-1/n}$. *Or,*

$$f_n(e^{-1/n}) = -e^{-1} \implies \|f_n\|_\infty \geq e^{-1}.$$

La convergence n'est pas uniforme.

3. *L'inégalité* $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ *prouve que* f_n *converge simplement vers la fonction nulle. Posons* $g(x) = e^{-x}\sin(2x)$. *On a* $f_n(x) = g(nx)$, *et donc la suite*

$$\|f_n\|_\infty = \|g\|_\infty > 0$$

vaut une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$ *: la convergence n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^+$. *En revanche, si* $a > 0$ *et* $x \geq a$, *on a :*

$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

4. *Les fonctions* f_n *sont paires, on peut restreindre l'étude à* $[0,+\infty[$. $f_n(0) = n$ *et donc* $(f_n(0))$ *diverge. Pour* $x > 0$, *la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que* $(ne^{-n^2x^2})$ *tend vers 0. Donc la suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur $[a,+\infty[$, *les fonctions* (f_n) *sont positives et décroissantes. On a donc*

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$$

et comme $(f_n(a))$ *tend vers 0, il en est de même de* $(\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)-0|)_n$. *La convergence est donc uniforme sur* $[a,+\infty[$. *Sur* $]0,+\infty[$, *on a*

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(0)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $]0,+\infty[$.

PONTAL Mario

Question de cours : La convergence normale implique la convergence uniforme.

Exercice 3. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer S'. Quel est le sens de variations de S ?

Solution **3.** *On pose* $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. *La série définissant* S *converge d'après le critère des séries alternées. De plus, notant* $R_n(x)$ *le reste de la série, le critère des séries alternées donne également*

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Fixons maintenant $a > 0$. *Alors, pour tout* $x \geq a$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Ainsi, la suite $(|R_n(x)|)$ *est majorée pour* $x \in [a, \infty[$ *par la suite* $\frac{1}{1+na}$, *qui ne dépend pas de* x, *et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la série sur l'intervalle* $[a, \infty[$. *Comme chaque fonction est continue sur* $[a, +\infty[$, *il en est de même de* S. *Puisque* $a > 0$ *est arbitraire,* S *est continue sur* $]0, +\infty[$.

2. *Puisque la convergence est uniforme sur l'intervalle* $[1, +\infty[$, *on peut appliquer le théorème d'interversion limite/séries et on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1.$$

On pouvait également appliquer le critère des séries alternées, et encadrer la somme par les deux premières sommes partielles. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq S(x) \leq 1.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des gendarmes.

3. *La fonction* S *converge simplement sur* $]0, +\infty[$. *Chaque fonction* u_n *est de classe* C^1 *sur ce même intervalle, avec*

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}.$$

On fixe $a > 0$ *et on va démontrer la convergence uniforme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$ *sur* $[a, +\infty[$ *en appliquant le critère des séries alternées. Soit* $x \geq a$. *On a*

$$|u_n'(x)| - |u_{n+1}'(x)| = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour* $n \geq n_0$, *on ait* $n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$. *Alors* $n(n+1)x^2 - 1 \geq 0$ *et donc la série de terme général* $u_n'(x)$ *converge d'après le critère des séries alternées. De plus, on a*

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(1+nx)^2} \leq \frac{1}{(1+na)^2}.$$

On conclut à la convergence uniforme comme à la première question. Donc, par les théorèmes généraux, S *est de classe* C^1 *sur* $[a, +\infty[$. *Comme* $a > 0$ *est arbitraire,* S *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
Représentation intégrale de la somme : on remarque que :

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{nx}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n (t^x)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{N+1}t^{(N+1)x}}{1+t^x}$$

Lorsque $N \to +\infty$, *le terme* $t^{(N+1)x}$ *tend vers 0 pour tout* $t \in [0, 1[$. *Par le théorème de convergence dominée (la valeur absolue de l'intégrande est majorée par* $\frac{2}{1+t^x}$, *fonction continue et intégrable sur* $[0, 1]$*), on obtient :*

$$S(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale, la fonction S *est strictement croissante, car pour* $t \in [0, 1[$, $x \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ *est strictement croissante.*

XXX

Exercice 4. Étudier la convergence sur $\mathbb{R}_+$ de $(I_n(x))_{n\geq 1}$ définie par

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, dt.$$

La fonction limite est-elle dérivable ?

Solution **4.** *On pose* $f_n(x,t) = t^x\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ *suite de fonctions qui converge simplement vers* $f(x,t) = t^x e^{-t}$ *sur* $\mathbb{R}_+$. *On pose* $I = \displaystyle\int_0^1 t^x e^{-t}\,dt$. *et on va majorer*

$$|I - I_n| \leq \int_0^1 t^x \left| e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \right| dt$$

On pose $u_n(t) = e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ *que l'on dérive*

$$u_n'(t) = e^t\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right] = -t\frac{e^t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \to |u_n'(t)| \leq \frac{e^t}{n}.$$

Ce qui montre que

$$\left|f_n(x,t) - t^x e^{-t}\right| = t^x|u_n(t) - u_n(0)| \leq \frac{t^{x+1}}{n}$$

d'où la convergence uniforme.