Colle 07 Probabilités

BUSSON Germain

Exercice 1. On dispose de N urnes ($N \geq 1$) notées $U_1, \ldots, U_N$.
Pour tout k compris entre 1 et N, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient, puis on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne qui a été choisie.

1. Quel est l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire ? Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, quel est la probabilité de choisir l'urne U_k ?
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement "au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu autant de boules rouges que de boules blanches" et R_{2n+1} l'évènement "on a obtenu une boucle rouge au $(2n+1)$-ième tirage".
2. Exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ sous forme d'une somme et donner une expression de $\mathbb{P}(R_{2n+1} \mid E_n)$.
3. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^p \, \mathrm{d}x$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(R_{2n+1} \mid E_n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \dfrac{n+2}{2n+3}$.

Solution **1.**

1. *L'univers est l'ensemble* $\{1,2,\ldots,N\}\times\{$ *Rouge, Blanc* $\}^{\mathbb{N}^*}$ *: le résultat de l'expérience est un couple* $\left(k,(c_n)_{n\geq 1}\right)$ *où* k *est le numéro de l'urne choisir et* $(c_n)_{n\geq 1}$ *la suite des couleurs des boules tirées (avec remise) dans cette urne.*
   Notons A_k *l'évènement "On a choisi l'urne* U_k *" et* p_k *sa probabilité. Il existe un réel* α *telle que :*

$$\forall k\in[1,n], p_k=\alpha k.$$

   Comme $p_1+\cdots+p_N=1$*, on obtient* $\alpha\sum_{k=1}^{N}p_k=1$*, soit* $\alpha=\dfrac{2}{N(N+1)}$*. Pour* $k\in[\![1,N]\!]$*, la probabilité de choisir l'urne* k *est donc égale à* $\dfrac{2k}{N(N+1)}$*.*

2. $(A_k)_{1\leq k\leq N}$ *est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n)&=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(E_n\mid A_k)\,P(A_k)=\sum_{k=1}^{N}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\frac{2k}{N(N+1)}\\&=\binom{2n}{n}\frac{2}{(N+1)}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$

   De la même façon :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{2n+1}\cap E_n)&=\sum_{k=1}^{N}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\frac{2k}{N(N+1)}\\&=\binom{2n}{n}\frac{2}{(N+1)}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$

   et donc

$$\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)=\frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n}$$

3. *Si* $p=0, I_{n,p}=\frac{1}{n+1}$*. Si* $p\geq 1$*, une intégration par partie donne :*

$$I_{n,p}=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^p\right]_0^1+\frac{p}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{p-1}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1}$$

   d'où par récurrence évidente :

$$\forall n,p\in\mathbb{N}, I_{n,p}=\frac{p!n!}{(n+p+1)!}$$

4. *Le dénominateur et le numérateur de* $\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)$ *sont, à un facteur* $1/N$ *près, des sommes de Riemann des intégrales* $I_{n+2,n}$ *et* $I_{n+1,n}$ *pour la subdivision de pas constant* $1/N$*. Comme cette seconde intégrale est non nulle, on en déduit :*

$$\mathbb{P}(R_{2n+1}\mid E_n)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}}=\frac{n+2}{2n+3}.$$

TURCK Thibault

Exercice 2. On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on intro duit les événements : $A_n =$ "On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences",
$B_n =$ "On obtient le premier couple de succès consécutifs aux rangs $n-1$ et n".
Enfin, on pose $p_n = \mathrm{P}(B_n)$ et $p_1 = 0$.

1. Calculer p_2, p_3 et p_4.
2. Pour $n \geq 2$, vérifier
$$\mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{et} \quad p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$
3. En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour tout $n \geq 1$.
4. Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Solution **2.**

1. *Notons S_n l'événement $\ll$ L'expérience au rang n est un succès $\gg$. On sait*

$$\mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}\left(\overline{S_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

On peut exprimer simplement [1] *B_2, B_3 et B_4 en fonctions des événements S_n :*

$$B_2 = S_1 \cap S_2, \quad B_3 = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4.$$

Par indépendance des résultats des différentes expériences

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

2. *L'événement A_n est la réunion des B_k pour k allant de 2 à n et ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par additivité, on a donc*

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{car} \quad p_1 = 0.$$

Étudions ensuite $\mathbb{P}(B_{n+3})$ On exprime B_{n+3} comme intersection d'événements indépendants. L'événement B_{n+3} signifie que deux succès consécutifs sont rencontrés aux rangs $n+2$ et $n+3$ et que cette situation n'a pas été rencontrée précédemment :

$$B_{n+3} = S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_{n+2}}.$$

Cependant, si l'expérience a réussi au rang $n+2$ mais qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant ce rang, c'est qu'elle a échoué aul rang $n+1$. Ainsi, $S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} \subset \overline{S_{n+1}}$ et donc

$$S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}}$$

Aussi, sachant que l'expérience a échoué au rang $n+1$, affirmer qu'il n'y a pas eu deux succès consécutifs avant le rang $n+2$ revient à signifier qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant le rang n :

$$\overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_n}.$$

Ainsi, on a l'égalité

$$B_{n+3} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_n}.$$

Enfin, les différentes expériences étant indépendantes et l'événement A_n n'étant que fonctions des événements $S_1, \ldots, S_n$, les événements de l'intersection précédentes sont indépendants ce qui donne

$$p_{n+3} = \mathbb{P}(B_{n+3}) = \mathbb{P}\left(\overline{S_{n+1}}\right)\mathbb{P}(S_{n+2})\,\mathbb{P}(S_{n+3})\,\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

3. *L'égalité précédente démontrée pour $n \geq 2$ est aussi vraie pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on peut alors écrire à la fois*

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{et} \quad p_{n+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right).$$

Par différence, on obtient $p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{1}{8}p_n$ et cette égalité est encore vraie pour $n = 1$.

4. *$(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 3 :on calcule son polynôme caractéristique*

$$\chi_A = X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)$$

On a p_1, p_2 et p_3 et on en déduit

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

XXX

Exercice 3. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois " Pile" consécutifs lors des n premiers lancers.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Pour $n \geq 4$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4. Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

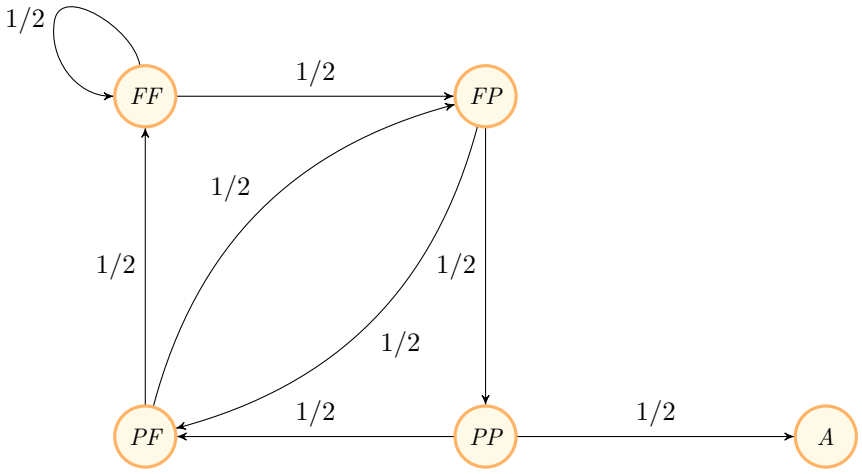
$$\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B})\mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

Solution **3.**

1. *On a* $p_1 = p_2 = 1$ *et* $p_3 = \dfrac{7}{8}$.
2. *On note* P_i *l'événement on obtient pile lors du i-ème lancer.* $F_i = \overline{P_i}$.
   Soit A_n *l'événement : ne pas avoir obtenu trois "Pile" consécutifs lors des n premiers lancers.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_n|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap F_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3)\\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap P_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3)\end{aligned}$$

   On en déduit $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}p_{n-3}$.
3. *On pourrait calculer les racines de l'équation caractérique pour trouver* p_n *puis la limite. Mais il est plus efficace de chercher les points fixe : il vient* $l = 0$.
   Pour s'assurer que (p_n) *est effectivement convergente, il est clair qu'elle est décroissante et minorée.*



On écrit $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. *On calcule*

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 3/16 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 3/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix},\ F = (I_Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = FR = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution **4.** 1. *On a* $p_1 = p_2 = 1$ *et* $p_3 = \dfrac{7}{8}$.

2. *On note* P_i *l'événement on obtient pile lors du i-ème lancer.* $F_i = \overline{P_i}$.
Soit A_n *l'événement : ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n = &= \mathbb{P}(A_n|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap F_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &+ \mathbb{P}(A_n|P_1 \cap P_2 \cap P_3)\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \end{aligned}$$

On en déduit $p_n = \dfrac{1}{2}p_{n-1} + \dfrac{1}{4}p_{n-2} + \dfrac{1}{8}p_{n-3}$.

3. *On pourrait calculer les racines de l'équation caractérique pour trouver* p_n *puis la limite. Mais il est plus efficace de chercher les points fixe : il vient* $l = 0$.
Pour s'assurer que (p_n) *est effectivement convergente, il est clair qu'elle est décroissante et minorée.*

Solution **5.**
Implication directe ($\Longrightarrow$)
Supposons que A et B sont indépendants, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. *Il est connu que si A et B sont indépendants, alors les paires* $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ *et* $(\bar{A}, \bar{B})$ *le sont aussi. L'égalité demandée est alors immédiate.*
Implication réciproque ($\Longleftarrow$) *Supposons que l'égalité* $\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B})\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ *est vraie. Montrons que A et B sont indépendants, c'est-à-dire* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Considérons la partition de l'univers Ω *induite par A et B :* $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$. *Posons*

$$p_{11} = \mathbb{P}(A \cap B),\ p_{10} = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}),\ p_{01} = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B),\ p_{00} = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$$

On a $p_{11} + p_{10} + p_{01} + p_{00} = 1$. *Les probabilités marginales sont* $\mathbb{P}(A) = p_{11} + p_{10}$ *et* $\mathbb{P}(B) = p_{11} + p_{01}$.
L'hypothèse est $p_{11}p_{00} = p_{10}p_{01}$.
Nous voulons montrer $p_{11} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (p_{11} + p_{10})(p_{11} + p_{01})$ *:*

$$p_{11} = p_{11}^2 + p_{11}p_{01} + p_{10}p_{11} + p_{10}p_{01}$$

Réarrangeons les termes :

$$p_{11} - p_{11}^2 - p_{11}p_{01} - p_{10}p_{11} = p_{10}p_{01}$$

Factorisons le membre de gauche par p_{11} *:*

$$p_{11}(1 - p_{11} - p_{01} - p_{10}) = p_{10}p_{01}$$

En utilisant la relation $p_{00} = 1 - p_{11} - p_{01} - p_{10}$, *l'égalité à prouver devient :*

$$p_{11}p_{00} = p_{10}p_{01}$$

Ceci est exactement l'hypothèse que nous avons faite. Donc, l'hypothèse est équivalente à la définition de l'indépendance.
Les deux implications étant prouvées, l'équivalence est démontrée.

XXX

Exercice 5. Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

— à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;

— le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

1. Établir que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Solution **6.**

1. *L'évènement B_n personne ne gagne au bout de n tours est décroissante et*

$$\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n).$$

   Par limite décroissante, le jeu s'arrête presque sûrement.

2. *Soit G_{AB} l'évènement A et B jouent et A gagne.*
   Pour que A gagne deux fois de suite (avant B et C) :
   (a) *soit A gagne la première partie et on a la distribuion*

$$G_{AB}\big(G_{CA}G_{BC}G_{AB}\big)^k G_{AC}$$

   de probabilité $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{2}{7}$.

   (b) *soit A perd la première partie et on a la distribuion*

$$\big(G_{BA}G_{CB}G_{AC}\big)^k G_{AB},\ k \geq 1$$

   de probabilité $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{2}{14}$.

   et donc la probabilté que A gagne vaut $\frac{5}{14}$.
   Pour B la probabilité de ganer est la même et pour C, elle vaut $\frac{4}{14}$.

