1 Puissances du sinus

Soit $h \in \mathcal{C}^0\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto h(x)\sin^n(x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On distingue deux cas :

- Si $x < \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \sin(x) < 1$, donc la suite géométrique $(\sin^n(x))$ tend vers 0, et ainsi $f_n(x) \to 0$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(x) = 1$, donc $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (f_n) converge donc simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On remarque que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si, et seulement si, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ce qui servira à la question suivante.

2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n).

On va montrer que la convergence est uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si, et seulement si, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On distingue pour cela deux cas :

- Si $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, la convergence n'est pas uniforme. En effet les fonctions f_n sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produits de fonctions continues, donc si la convergence était uniforme, la limite f serait continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or d'après la question 1, f n'est pas continue en $\frac{\pi}{2}$.
- Si $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, la limite f est la fonction nulle, et l'on va montrer que la convergence est uniforme, autrement dit que la borne supérieure de $|f_n|$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tend vers 0.

On suppose donc désormais que $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. On ne peut pas majorer $\sin^n(x)$ sur tout l'intervalle par une quantité qui tend vers 0, puisque $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. En revanche, près de $\frac{\pi}{2}$ la fonction h est petite par continuité, et loin de $\frac{\pi}{2}$ on peut majorer $\sin^n$ par une suite géométrique qui tend vers 0. On découpe donc l'intervalle en deux.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme h est continue en $\frac{\pi}{2}$ et que $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, il existe $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right], \quad |h(x)| \leq \varepsilon$$

Le réel δ étant ainsi fixé, on majore $|f_n|$ sur chacun des deux morceaux :

- Sur $\left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$, on a $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Sur $\left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right]$, la fonction sinus est croissante, donc $0 \leq \sin(x) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos(\delta)$, et l'on pose $c = \cos(\delta)$, qui vérifie $0 < c < 1$ puisque $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus h est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle y est donc bornée, et l'on note M un majorant de $|h|$. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq M c^n$$

Or $M c^n \to 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $M c^n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Finalement, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|f_n(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le résultat.

Remarque

On remarque que lorsque $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, la convergence n'est pas non plus uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, bien que la limite y soit la fonction nulle, qui est continue. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue en $\frac{\pi}{2}$, donc $|f_n(x)|$ tend vers $\left|h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[} |f_n(x)| \geq \left|h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Ainsi cette borne supérieure ne tend pas vers 0.

2 Étude d'une suite de fonctions

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$ pour $x \in [0,1]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

De façon immédiate on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit à présent $x \in]0,1]$. Comme $1+2^n n x^2 \geq 2^n n x^2 > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \frac{1}{nx}$$

et par encadrement $f_n(x) \to 0$. Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Que peut-on en déduire sur la suite (f_n) ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $u : t \mapsto 1+2^n n t^2$ est strictement positive sur $[0,1]$, de dérivée $u' : t \mapsto 2^{n+1} n t$, on reconnaît donc dans f_n, à une constante près, une expression de la forme $\frac{u'}{u}$. Plus précisément on a $f_n = \frac{1}{2n} \times \frac{u'}{u}$, d'où :

$$I_n = \frac{1}{2n}\Big[\ln\left(1+2^n n t^2\right)\Big]_0^1 = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$$

Pour la limite, on factorise par $n2^n$ dans le logarithme, ce qui donne :

$$I_n = \frac{1}{2n}\left(n\ln 2 + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n2^n}\right)\right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln n}{2n} + \frac{1}{2n}\ln\left(1+\frac{1}{n2^n}\right)$$

Or $\frac{\ln n}{n} \to 0$ par croissances comparées, et le dernier terme tend vers 0, ainsi $I_n \to \frac{\ln 2}{2}$.

On en déduit que la convergence de (f_n) n'est pas uniforme sur $[0,1]$. En effet les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0,1]$, donc si (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, ce serait vers sa limite simple, c'est-à-dire vers la fonction nulle, et l'on pourrait intervertir limite et intégrale. On aurait alors $I_n \to 0$, ce qui est absurde puisque $\frac{\ln 2}{2} \neq 0$.

3. Montrer directement, sans passer par l'intégrale, que la convergence n'est pas uniforme.

Il suffit de trouver une suite (x_n) de points de $[0,1]$ telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0, puisque la borne supérieure de $|f_n|$ sur $[0,1]$ est supérieure à $f_n(x_n)$. Pour que le numérateur $2^n x_n$ ne tende pas vers 0, on choisit $x_n = \frac{1}{2^n}$, et l'on obtient alors :

$$f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puisque $\frac{n}{2^n} \to 0$ par croissances comparées. Ainsi la borne supérieure de $|f_n|$ sur $[0,1]$ ne tend pas vers 0, la convergence n'est donc pas uniforme.

Remarque

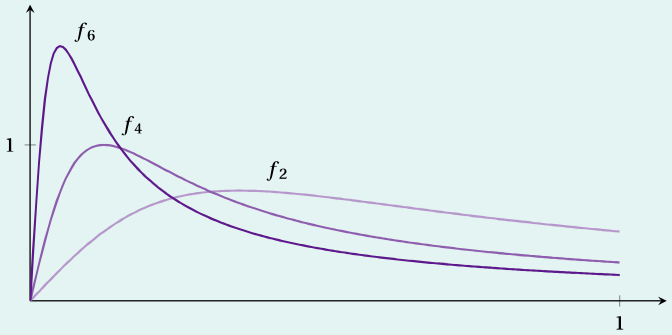
On aurait aussi pu calculer cette borne supérieure. En effet f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$f_n'(x) = \frac{2^n\left(1-2^n n x^2\right)}{\left(1+2^n n x^2\right)^2}$$

Ainsi f_n est croissante sur $[0,a_n]$ et décroissante sur $[a_n,1]$, où l'on a posé $a_n = \frac{1}{\sqrt{n2^n}}$, et son maximum vaut :

$$f_n(a_n) = \frac{2^n a_n}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On observe sur la figure suivante, où sont représentées f_2, f_4 et f_6, que le maximum est atteint de plus en plus près de 0 et qu'il augmente, alors qu'en tout point fixé les valeurs tendent vers 0.



---

3 Convergence uniforme avec paramètre

Soit $a \geq 0$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si, et seulement si, $a < 1$.

On commence par la convergence simple. Soit $x \in [0,1]$, on distingue deux cas :

- Si $x = 1$, on a $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $x < 1$, on a $n^a x^n \to 0$ par croissances comparées, donc $f_n(x) \to 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Pour la convergence uniforme, il s'agit de savoir si la borne supérieure de $|f_n|$ sur $[0,1]$ tend vers 0. Comme f_n est positive, on cherche son maximum à l'aide de ses variations.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$f_n'(x) = n^a\left(n x^{n-1}(1-x) - x^n\right) = n^a x^{n-1}\left(n-(n+1)x\right)$$

Ainsi f_n est croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$, son maximum est donc atteint en $\frac{n}{n+1}$. On note M_n ce maximum, et l'on obtient :

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Il reste à étudier la limite de M_n. Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on a d'une part :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

et d'autre part $\frac{n^a}{n+1} \sim n^{a-1}$, d'où :

$$M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{a-1}}{e}$$

On distingue alors trois cas :

- Si $a<1$, on a $M_n \to 0$, la convergence est donc uniforme sur $[0,1]$.
- Si $a=1$, on a $M_n \to \frac{1}{e}$, qui n'est pas nul.
- Si $a>1$, on a $M_n \to +\infty$.

Dans les deux derniers cas M_n ne tend pas vers 0, la convergence n'est donc pas uniforme. Ainsi (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $a<1$, d'où le résultat.

Remarque

On remarque que pour $a=1$, les intégrales ne permettent pas de mettre en défaut la convergence uniforme. En effet on a :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi la suite des intégrales converge vers l'intégrale de la limite alors que la convergence n'est pas uniforme, autrement dit la réciproque du théorème d'interversion sur un segment est fausse.

---

4 Suite d'intégrales

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$n\int_0^1 f(t)\,g(nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$$

L'entier n apparaît à la fois devant l'intégrale et dans $g(nt)$, ce qui ne permet pas de passer à la limite directement. On commence donc par le changement de variable $u=nt$, qui fait porter la dépendance en n sur f, dont on connaît le comportement en 0 par continuité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable affine $u=nt$ sur le segment $[0,1]$ donne :

$$n\int_0^1 f(t)\,g(nt)\,dt = \int_0^n f\left(\frac{u}{n}\right)g(u)\,du$$

La borne supérieure dépend encore de n, on se ramène donc à l'intervalle fixe $\mathbb{R}_+$ en posant, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n(u) = \begin{cases} f\left(\frac{u}{n}\right)g(u) & \text{si } u \le n \\ 0 & \text{si } u > n \end{cases}$$

de sorte que :

$$n\int_0^1 f(t)\,g(nt)\,dt = \int_0^{+\infty} h_n(u)\,du$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(h_n)_{n\ge1}$ sur $\mathbb{R}_+$, pour cela on vérifie ses hypothèses.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, puisqu'elle est continue sur $[0,n]$ et nulle sur $]n,+\infty[$.

Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \ge u$ on a $h_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right)g(u)$, et comme f est continue en 0, on en déduit que $h_n(u) \to f(0)\,g(u)$. Ainsi (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f(0)\,g$, qui est continue.

Enfin f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc bornée, et l'on note M un majorant de $|f|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$ on a alors :

$$|h_n(u)| \le M|g(u)|$$

et la fonction $M|g|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et ne dépend pas de n.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$n\int_0^1 f(t)\,g(nt)\,dt = \int_0^{+\infty} h_n(u)\,du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(0)\,g(u)\,du = f(0)\int_0^{+\infty} g(u)\,du$$

d'où le résultat.

Remarque

On remarque que pour $g : t \mapsto e^{-t}$, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1, on obtient :

$$n\int_0^1 f(t)\,e^{-nt}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$$

On remarque aussi que l'on a seulement utilisé que f est bornée et continue en 0. Le résultat reste donc vrai pour une fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$ et continue en 0.

---

5 Suite de primitives

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(\operatorname{ch} t)^n}$.

1. Montrer que I_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner sa dérivée. Montrer que la suite (I_n) converge simplement vers une fonction à déterminer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi_n : t \mapsto \frac{1}{(\operatorname{ch} t)^n}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ puisque ch est continue et ne s'annule pas.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, I_n est donc définie sur $\mathbb{R}$, et c'est la primitive de φ_n qui s'annule en 0. Ainsi I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_n'(x) = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^n}$$

Pour la convergence simple, on remarque d'abord que $I_n(0) = 0$ pour tout n, et que I_n est impaire. En effet φ_n est paire, et le changement de variable $s = -t$ donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_n(-x) = \int_0^{-x} \varphi_n(t)\,dt = -\int_0^x \varphi_n(-s)\,ds = -\int_0^x \varphi_n(s)\,ds = -I_n(x)$$

Il suffit donc d'étudier la limite de $(I_n(x))$ pour $x > 0$.

Soit donc $x > 0$. On va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (φ_n) sur le segment $[0,x]$, pour cela on vérifie ses hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est continue sur $[0,x]$.
- Pour $t \in]0,x]$ on a $\operatorname{ch} t > 1$, donc $\varphi_n(t) \to 0$, et $\varphi_n(0) = 1$ pour tout n. Ainsi (φ_n) converge simplement sur $[0,x]$ vers la fonction φ qui vaut 1 en 0 et 0 sur $]0,x]$, qui est continue par morceaux.
- Comme $\operatorname{ch} t \geq 1$, on a $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,x]$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur le segment $[0,x]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$I_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \varphi(t)\,dt = 0$$

Par imparité, on a aussi $I_n(x) \to 0$ pour $x < 0$.

Ainsi (I_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Remarque

Attention, on ne peut pas utiliser ici le théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale sur un segment. En effet la convergence de (φ_n) n'est pas uniforme sur $[0,x]$, puisque les fonctions φ_n sont continues alors que leur limite simple φ ne l'est pas en 0.

2. Étudier la convergence uniforme de (I_n) sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'étudier la borne supérieure de $|I_n|$ sur $\mathbb{R}$, que l'on va exprimer comme une intégrale sur $\mathbb{R}_+$. On reprend la notation φ_n de la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $I_n' = \varphi_n > 0$, la fonction I_n est croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $I_n(0) = 0$ elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Avec l'imparité, on en déduit que la borne supérieure de $|I_n|$ sur $\mathbb{R}$ est celle de I_n sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire la limite de I_n en $+\infty$, qui existe dans $[0,+\infty]$ puisque I_n est croissante.

Pour écrire cette limite comme une intégrale sur $\mathbb{R}_+$, on vérifie que φ_n y est intégrable. Or pour tout $t \geq 0$ on a $\operatorname{ch} t \geq 1$ et $\operatorname{ch} t \geq \frac{e^t}{2}$, d'où :

$$0 \leq \varphi_n(t) \leq \frac{1}{\operatorname{ch} t} \leq 2e^{-t}$$

Comme $t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction φ_n l'est aussi, et ainsi :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |I_n(x)| = \lim_{x\to+\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch} t)^n}$$

Il reste à montrer que cette suite d'intégrales tend vers 0. On applique à nouveau le théorème de convergence dominée, cette fois sur $\mathbb{R}_+$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Comme à la question précédente, (φ_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 sur $]0,+\infty[$, qui est continue par morceaux.
- La majoration $0 \leq \varphi_n(t) \leq 2e^{-t}$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, et la fonction $t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et ne dépend pas de n.

On en déduit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |I_n(x)| = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi (I_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Remarque

On aurait aussi pu se passer du théorème de convergence dominée, ce qui fournit en plus une majoration explicite.

En effet, comme $\operatorname{ch} \geq 1$, on obtient en intégrant deux fois entre 0 et t que $\operatorname{sh} t \geq t$ puis $\operatorname{ch} t \geq 1 + \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \geq 0$. D'après la formule du binôme, dont tous les termes sont ici positifs, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$(\operatorname{ch} t)^n \geq \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{nt^2}{2} \qquad \text{donc} \qquad 0 \leq \varphi_n(t) \leq \frac{2}{2+nt^2}$$

Ces deux fonctions étant intégrables sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |I_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2}{2+nt^2}\, dt = \sqrt{\frac{2}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$$

où l'on a effectué le changement de variable $s = t\sqrt{\frac{n}{2}}$, qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

---

6 Limite uniforme de polynômes

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes réels convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

Sur $\mathbb{R}$, les seules fonctions polynomiales bornées sont les constantes. On cherche donc à faire apparaître des polynômes bornés, et pour cela on compare les P_n entre eux.

Comme (P_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|P_n(x) - f(x)| \leq 1$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq N$, d'après l'inégalité triangulaire on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|P_n(x) - P_N(x)| \leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \leq 2$$

Ainsi le polynôme $P_n - P_N$ est borné sur $\mathbb{R}$. Or un polynôme Q de degré $d \geq 1$ et de coefficient dominant a vérifie $|Q(x)| \sim |a|x^d$ lorsque x tend vers $+\infty$, il n'est donc pas borné sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $P_n - P_N$ est constant, autrement dit il existe un réel c_n tel que :

$$P_n = P_N + c_n$$

Il reste à montrer que la suite $(c_n)_{n \geq N}$ converge. Or $c_n = P_n(0) - P_N(0)$, et $P_n(0) \to f(0)$ puisque la convergence uniforme entraîne la convergence simple, ainsi $c_n \to c$ où l'on a posé $c = f(0) - P_N(0)$.

Soit enfin $x \in \mathbb{R}$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $P_n(x) = P_N(x) + c_n$, on obtient $f(x) = P_N(x) + c$. Ainsi $f = P_N + c$ est une fonction polynomiale, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque

On remarque que le résultat est faux sur un segment. Par exemple, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Ainsi la fonction exponentielle est la limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales. Pourtant elle n'est pas polynomiale sur ce segment, puisque ses dérivées successives en 0 valent toutes 1, alors que celles d'un polynôme sont nulles à partir d'un certain rang.

---

7 Limite uniforme de fonctions uniformément continues

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. On suppose que chaque f_n est uniformément continue sur I et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I.

On passe de $f(x)$ à $f(y)$ par l'intermédiaire d'une fonction f_N, que la convergence uniforme permet de choisir proche de f en tous les points de I à la fois.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

L'entier N étant ainsi fixé, la fonction f_N est uniformément continue sur I, il existe donc $\delta > 0$ tel que $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tous x et y dans I vérifiant $|x - y| \leq \delta$. Soient donc x et y dans I tels que $|x - y| \leq \delta$, d'après l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Le réel δ ne dépend que de ε, et non de x ni de y, ainsi f est uniformément continue sur I.

On remarque que l'on a utilisé la convergence uniforme pour choisir un même entier N pour tous les points de I. La question suivante montre que la convergence simple ne suffit pas.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n + x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que chaque f_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge pour tout réel x vers une limite $f(x)$, mais que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Qu'en conclure ?

Soit $n \geq 1$. Pour montrer que f_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'elle est lipschitzienne, et pour cela que sa dérivée est bornée. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_n'(x) = \frac{2nx\left(n+x^2\right) - nx^2 \times 2x}{\left(n+x^2\right)^2} = \frac{2n^2x}{\left(n+x^2\right)^2}$$

Or l'inégalité $\left(\sqrt{n} - |x|\right)^2 \geq 0$ donne $2\sqrt{n}|x| \leq n + x^2$, et de plus $n + x^2 \geq n$, d'où :

$$|f_n'(x)| = \frac{n^2 \times 2|x|}{\left(n+x^2\right)^2} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n}\left(n+x^2\right)} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n} \times n} = \sqrt{n}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sqrt{n}|x-y|$ pour tous réels x et y. Ainsi f_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, en effet pour $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Soit à présent $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n(x) = x^2 \times \frac{n}{n+x^2}$ et $\frac{n}{n+x^2} \to 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $f_n(x) \to x^2$. Ainsi (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Montrons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle l'est, il existe alors $\delta > 0$ tel que $\left|x^2 - y^2\right| \leq 1$ pour tous réels x et y vérifiant $|x-y| \leq \delta$. Or pour $x = \frac{1}{\delta}$ et $y = x + \delta$, on a $|x-y| = \delta$ et :

$$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = \delta\left(\frac{2}{\delta} + \delta\right) = 2 + \delta^2 > 1$$

ce qui est absurde.

On en conclut qu'une limite simple de fonctions uniformément continues n'est pas nécessairement uniformément continue, autrement dit on ne peut pas remplacer la convergence uniforme par la convergence simple dans la question précédente. En particulier la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, sans quoi f serait uniformément continue d'après cette même question.

Remarque

On peut aussi le vérifier directement. En effet pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) - f_n(x) = x^2 - \frac{nx^2}{n+x^2} = \frac{x^4}{n+x^2}$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi $f - f_n$ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ pour aucun entier n.

---

8 Limite et équivalent

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$$

1. On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. Que vaut l ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$. On va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (g_n) sur le segment $[0,1]$, pour cela on vérifie ses hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $[0,1]$.
- Pour $t \in [0,1[$ on a $t^n \to 0$, donc $g_n(t) \to 1$, et $g_n(1) = \frac{1}{2}$ pour tout n. Ainsi (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction g qui vaut 1 sur $[0,1[$ et $\frac{1}{2}$ en 1, qui est continue par morceaux.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$ on a $0 \leq g_n(t) \leq 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$I_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t)\,dt = 1$$

Ainsi $l = 1$.

Remarque

On aurait aussi pu majorer directement l'écart entre I_n et 1. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leq 1 - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

Cette écriture de $1 - I_n$ servira à la question suivante.

2. Chercher un équivalent de $I_n - l$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $l = 1$ d'après la question 1, on a :

$$I_n - l = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right) dt = -J_n \qquad \text{où l'on a posé} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt$$

Il s'agit donc de trouver un équivalent de J_n. Comme n n'apparaît que dans t^n, on effectue le changement de variable $u = t^n$, afin de faire sortir de l'intégrale un facteur qui tend vers 0.

L'application $u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0,1]$ sur lui-même, de dérivée $u \mapsto \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$. Le changement de variable $t = u^{1/n}$ est donc licite, et il donne :

$$J_n = \int_0^1 \frac{u}{1+u} \times \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}\,du$$

Il reste à déterminer la limite de cette dernière intégrale, que l'on note K_n. Pour cela on applique à nouveau le théorème de convergence dominée, cette fois à la suite des fonctions $k_n : u \mapsto \frac{u^{1/n}}{1+u}$ sur $]0,1]$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction k_n est continue sur $]0,1]$.
- Pour $u \in]0,1]$ on a $u^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln u}{n}\right) \to 1$. Ainsi (k_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$, qui est continue.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in]0,1]$ on a $0 \leq k_n(u) \leq 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0,1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2$$

Comme cette limite n'est pas nulle, on en déduit que $J_n = \frac{K_n}{n} \sim \frac{\ln 2}{n}$, c'est-à-dire :

$$I_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 2}{n}$$

Remarque

Une autre méthode aurait été d'intégrer par parties, en écrivant $\frac{t^n}{1+t^n} = t \times \frac{t^{n-1}}{1+t^n}$.

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{1}{n}\ln(1+t^n)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, on obtient donc :

$$J_n = \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$$

Or $0 \leq \ln(1+t^n) \leq t^n$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où en intégrant :

$$0 \leq \frac{\ln 2}{n} - J_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

On retrouve ainsi l'équivalent sans le théorème de convergence dominée, avec en plus une majoration de l'erreur.