1 Noyaux et images des puissances

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\ker A^k = \ker A$ et $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A$.

De façon immédiate on a $\ker A \subset \ker A^k$ et $\operatorname{Im} A^k \subset \operatorname{Im} A$, puisque $A^k X = A^{k-1}(AX)$ et $A^k X = A\left(A^{k-1}X\right)$ pour toute colonne X. Il reste donc à montrer les inclusions réciproques. Or d'après le théorème du rang, l'égalité $\dim\ker A^k = \dim\ker A$ entraîne $\operatorname{rg} A^k = \operatorname{rg} A$, il suffit donc de montrer que $\ker A^k \subset \ker A$, et pour cela on utilise que A est diagonalisable.

On écrit $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, de sorte que $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $X \in \ker A^k$, on pose $Y = P^{-1}X$ et on note $y_1, \dots, y_n$ ses coordonnées. L'égalité $A^kX = 0$ entraîne $D^kY = 0$, c'est-à-dire $d_i^k y_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Si $d_i \neq 0$ on en déduit $y_i = 0$, et si $d_i = 0$ il n'y a rien à montrer, ainsi dans tous les cas on a $d_i y_i = 0$. On a donc $DY = 0$, puis $AX = PDY = 0$, d'où $\ker A^k = \ker A$.

Enfin, d'après le théorème du rang, on a :

$$\operatorname{rg} A^k = n - \dim\ker A^k = n - \dim\ker A = \operatorname{rg} A$$

Ainsi $\operatorname{Im} A^k$ est inclus dans $\operatorname{Im} A$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension, d'où $\operatorname{Im} A^k = \operatorname{Im} A$.

Remarque

On remarque que l'hypothèse de diagonalisabilité est nécessaire. En effet pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A^2 = 0$, donc $\ker A^2 = \mathbb{R}^2$ alors que $\ker A \neq \mathbb{R}^2$.

2. Soient A, B et M trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A et B diagonalisables, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A^kMB^k = 0$, alors $AMB = 0$.

On va utiliser la question 1 pour retirer les puissances l'une après l'autre. Pour A^k, qui est à gauche dans le produit, on utilise l'égalité des noyaux, et pour B^k, qui est à droite, l'égalité des images.

L'égalité $A^k\left(MB^k\right) = 0$ signifie que $\operatorname{Im}\left(MB^k\right) \subset \ker A^k$. Or A est diagonalisable, donc $\ker A^k = \ker A$ d'après la question 1, ainsi $\operatorname{Im}\left(MB^k\right) \subset \ker A$, c'est-à-dire $AMB^k = 0$.

Soit à présent $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme B est diagonalisable, on a $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} B^k$, il existe donc une colonne Y telle que $BX = B^kY$. On en déduit alors :

$$AMBX = AMB^kY = 0$$

Ceci étant vrai pour toute colonne X, on a bien $AMB = 0$.

Remarque

On remarque que l'on ne peut pas se passer de la diagonalisabilité de B. En effet pour $A = M = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $k = 2$, on a $A^2MB^2 = B^2 = 0$ alors que $AMB = B \neq 0$. En échangeant les rôles, c'est-à-dire avec $M = B = I_2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que l'on ne peut pas non plus se passer de celle de A.

---

2 Codiagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g admettent une base commune de diagonalisation.

Comme f est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de f, et tout vecteur non nul de l'un d'eux est un vecteur propre de f. Il suffit donc de trouver, dans chaque sous-espace propre de f, une base formée de vecteurs propres de g, puis de mettre ces bases bout à bout.

Soient λ une valeur propre de f et $F = E_\lambda(f)$. Comme f et g commutent, F est stable par g, en effet pour $x \in F$ on a :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

donc $g(x) \in F$. On peut alors considérer l'endomorphisme g_F de F induit par g.

Or g est diagonalisable, il existe donc un polynôme Q scindé à racines simples tel que $Q(g) = 0$. Comme $g_F^j(x) = g^j(x)$ pour tout $x \in F$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a aussi $Q(g_F) = 0$, ainsi g_F est diagonalisable. Il existe donc une base de F formée de vecteurs propres de g_F, et comme $g_F(x) = g(x)$ pour $x \in F$, ce sont aussi des vecteurs propres de g.

Enfin, en mettant bout à bout les bases obtenues pour chaque valeur propre de f, on obtient une base de E, puisque E est la somme directe des sous-espaces propres de f. Chaque vecteur de cette base est propre pour g par construction, et propre pour f car il est non nul et appartient à un sous-espace propre de f. Ainsi les matrices de f et de g dans cette base sont diagonales, d'où le résultat.

Remarque

On remarque que la réciproque est vraie, puisque deux matrices diagonales commutent. On ne peut donc pas retirer l'hypothèse de commutation, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables mais ne commutent pas, elles n'ont donc pas de base commune de diagonalisation.

---

3 Une équation matricielle réelle

On s'intéresse aux matrices réelles M vérifiant $M^2 + M + I_n = 0$.

1. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_7 = 0$?

La réponse est non, on raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle matrice M existe. Le polynôme $X^2 + X + 1$ est alors un polynôme annulateur de M, donc toute valeur propre réelle de M en est une racine. Or son discriminant vaut $-3 < 0$, il n'a donc pas de racine réelle, ainsi M n'a aucune valeur propre réelle. On va voir que c'est impossible pour une matrice de taille impaire.

En effet χ_M est un polynôme réel unitaire de degré 7, il tend donc vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme il est continu sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit un réel λ tel que $\chi_M(\lambda) = 0$, et λ est alors une valeur propre réelle de M. On aurait donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de telle matrice.

2. Montrer que pour tout entier n pair non nul, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.

On commence par la taille 2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est annulée par son polynôme caractéristique $X^2 - \mathrm{Tr}(C)X + \det(C)$, il suffit donc de trouver une matrice de trace -1 et de déterminant 1. C'est le cas par exemple de :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui vérifie donc $C^2 + C + I_2 = 0$.

Soit à présent $n = 2m$ avec $m \geq 1$. On considère la matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(C, \dots, C)$, formée de m blocs égaux à C. Par calcul par blocs on obtient :

$$M^2 + M + I_n = \mathrm{diag}\left(C^2 + C + I_2, \dots, C^2 + C + I_2\right) = 0$$

d'où le résultat.

Remarque

On remarque que la matrice de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ convient aussi en taille 2, puisqu'elle a pour trace $2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$ et pour déterminant 1.

3. Soit n pair et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de M, puis sa trace et son déterminant.

Comme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle, M n'a pas de valeur propre réelle. On se place donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où χ_M est scindé. Le polynôme $X^2 + X + 1 = (X - j)\left(X - \bar{j}\right)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, annule M, donc les valeurs propres complexes de M sont parmi j et $\bar{j}$. Il existe ainsi deux entiers a et b tels que :

$$\chi_M = (X - j)^a \left(X - \bar{j}\right)^b \qquad \text{avec} \qquad a + b = n$$

Il reste à relier a et b, et pour cela on utilise que M est à coefficients réels. En effet χ_M est alors à coefficients réels, donc il est égal au polynôme obtenu en conjuguant ses coefficients, à savoir :

$$\chi_M = \left(X - \bar{j}\right)^a (X - j)^b$$

Par unicité de la multiplicité de j comme racine de χ_M, on en déduit $a = b$, et comme $a + b = n$, on obtient $a = b = \frac{n}{2}$, d'où :

$$\chi_M = \left(X^2 + X + 1\right)^{\frac{n}{2}}$$

On remarque que l'on retrouve ainsi la question 1, puisque l'égalité $a = b$ entraîne que $n = 2a$ est pair.

Enfin, comme χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, la trace de M est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, et son déterminant en est le produit. Comme $j + \bar{j} = -1$ et $j\bar{j} = 1$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(M) = \frac{n}{2}\left(j + \bar{j}\right) = -\frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \det(M) = \left(j\bar{j}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$$

Remarque

On aurait aussi pu trouver le déterminant sans les valeurs propres. En effet on a $M^3 - I_n = (M - I_n)\left(M^2 + M + I_n\right) = 0$, donc $\det(M)^3 = 1$, et comme $\det(M)$ est un réel on en déduit $\det(M) = 1$.

---

4 Trace et polynôme annulateur

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soient λ un réel, $r \in [\![0, n]\!]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \lambda u$ et $\mathrm{rg}\, u = r$. Calculer la trace de u.

Le polynôme $X(X - \lambda)$ annule u, et ses deux racines sont distinctes si $\lambda \neq 0$, confondues si $\lambda = 0$. On distingue donc ces deux cas, et on va montrer que dans les deux on a $\mathrm{Tr}\, u = \lambda r$.

Supposons dans un premier temps que $\lambda \neq 0$, et posons $p = \frac{1}{\lambda} u$. On a alors :

$$p^2 = \frac{1}{\lambda^2} u^2 = \frac{1}{\lambda} u = p$$

ainsi p est un projecteur, de même rang r que u. Dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \ker p$, la matrice de p est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ avec r coefficients égaux à 1, donc $\mathrm{Tr}\, p = r$, et finalement $\mathrm{Tr}\, u = \lambda\, \mathrm{Tr}\, p = \lambda r$.

Si $\lambda = 0$, on a $u^2 = 0$. Le polynôme X^2 est scindé et annule u, donc u est trigonalisable et sa seule valeur propre possible est 0. Ainsi dans une base où la matrice de u est triangulaire, les coefficients diagonaux sont tous nuls, d'où $\mathrm{Tr}\, u = 0 = \lambda r$.

Remarque

On aurait aussi pu traiter le cas $\lambda = 0$ sans trigonaliser. En effet $u^2 = 0$ entraîne $\mathrm{Im}\, u \subset \ker u$, on complète alors une base de $\mathrm{Im}\, u$ en une base de $\ker u$, puis en une base de E, et la matrice de u dans cette base a une diagonale nulle.

2. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle telles que $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$.

La situation semble adaptée pour utiliser le lemme des noyaux, puis la question 1 pour calculer la trace sur chacun des sous-espaces obtenus. Le polynôme $X^3-4X^2+4X=X(X-2)^2$ annule M, et les polynômes X et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux, donc d'après le lemme des noyaux :

$$\mathbb{R}^n = \ker M \oplus \ker(M-2I_n)^2$$

Ces deux sous-espaces sont stables par M, car ce sont des noyaux de polynômes en M. On note d la dimension du second, et on suppose par l'absurde que $d \geq 1$. Dans une base adaptée à cette décomposition, M est semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs 0 et N, où $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifie $(N-2I_d)^2 = 0$. On applique alors la question 1, avec $\lambda = 0$, à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ de matrice $N-2I_d$, ce qui donne $\mathrm{Tr}(N-2I_d) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}\,N = 2d$. Comme deux matrices semblables ont la même trace, on aurait alors :

$$0 = \mathrm{Tr}\,M = \mathrm{Tr}\,N = 2d > 0$$

ce qui est absurde. Ainsi $d = 0$, donc $\ker M = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $M = 0$. Réciproquement la matrice nulle convient, c'est donc la seule solution.

Remarque

Une autre méthode aurait été de se passer de la question 1. Le polynôme annulateur étant scindé, M est trigonalisable et son spectre est inclus dans $\{0,2\}$, ainsi $\mathrm{Tr}\,M = 2m$, où m est la multiplicité de 2 dans χ_M. On en déduit $m = 0$, donc $M-2I_n$ est inversible, et l'égalité $M(M-2I_n)^2 = 0$ donne $M = 0$. On remarque d'ailleurs que $d = m$, puisque $\ker(M-2I_n)^2$ est le sous-espace caractéristique de M associé à 2 lorsque 2 est valeur propre, et qu'il est réduit à $\{0\}$ sinon.

---

5 Matrice par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est.

On va utiliser la caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur scindé à racines simples. Pour cela on montre que, pour tout polynôme Q, le bloc en haut à gauche de $Q(B)$ est $Q(A)$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & C_k \\ 0 & (3A)^k \end{pmatrix}$. C'est vrai pour $k = 0$ avec $C_0 = 0$, et si c'est vrai au rang k, alors par produit par blocs on a :

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} A^k & C_k \\ 0 & (3A)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & 2A^{k+1}+3C_kA \\ 0 & (3A)^{k+1} \end{pmatrix}$$

d'où le résultat au rang $k+1$, avec $C_{k+1} = 2A^{k+1}+3C_kA$. Par combinaison linéaire, pour tout polynôme Q, le bloc en haut à gauche de $Q(B)$ est donc $Q(A)$.

Or B est diagonalisable, il existe donc un polynôme Q scindé à racines simples tel que $Q(B) = 0$. On en déduit $Q(A) = 0$, ainsi A est diagonalisable.

Remarque

Une autre méthode aurait été d'utiliser l'endomorphisme induit. En effet le sous-espace des colonnes dont les n dernières coordonnées sont nulles est stable par B, et l'endomorphisme induit a pour matrice A dans la base canonique de ce sous-espace, il est donc diagonalisable dès que B l'est.

2. Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable, alors B l'est aussi.

La matrice B s'obtient à partir de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en multipliant chaque coefficient par A. On commence donc par diagonaliser cette matrice de taille 2, puis on reproduit le changement de base par blocs. Ses valeurs propres

sont 1 et 3, de vecteurs propres respectifs $(1,0)$ et $(1,1)$, ce qui donne la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, qui est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Par produit par blocs on a $B\mathcal{P} = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$, puis :

$$\mathcal{P}^{-1}B\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 3A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$$

Il reste à utiliser que A est diagonalisable. On écrit $A = RDR^{-1}$ avec R inversible et D diagonale. La matrice $\mathrm{diag}(R,R)$ est alors inversible, d'inverse $\mathrm{diag}\left(R^{-1},R^{-1}\right)$, et on a :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi B est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(D,3D)$, elle est donc diagonalisable. Avec la question précédente, on en conclut que B est diagonalisable si, et seulement si, A l'est.

Remarque

Attention, on a utilisé que les coefficients diagonaux 1 et 3 sont distincts. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable pour $A = I_n$, car sa seule valeur propre est 1 alors qu'elle n'est pas égale à I_{2n}.

---

6 Carré diagonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

Supposons dans un premier temps que f est diagonalisable, et considérons $(e_1,\dots,e_n)$ une base formée de vecteurs propres de f, associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$, il existe $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ tel que $x = f(y)$, et on a alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i e_i \qquad \text{et} \qquad 0 = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i e_i$$

La seconde égalité donne $\lambda_i^2 y_i = 0$, donc $\lambda_i y_i = 0$ pour tout i, et la première donne alors $x = 0$.

Réciproquement, supposons que $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$, on cherche un polynôme scindé à racines simples qui annule f. Comme f^2 est diagonalisable, il est annulé par le produit des $X-\mu$, où μ parcourt son spectre, donc f est annulé par le produit des $X^2-\mu$. Sur $\mathbb{C}$, pour $\mu \neq 0$, le polynôme $X^2-\mu$ a deux racines distinctes, mais si 0 est valeur propre de f^2, on obtient le facteur X^2, qui a une racine double. On va donc utiliser l'hypothèse pour remplacer ce facteur par X.

Montrons d'abord que $\ker f^2 = \ker f$. De façon immédiate $\ker f \subset \ker f^2$, réciproquement si $f^2(x) = 0$, alors $f(x)$ appartient à $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f$, donc $f(x) = 0$.

Notons à présent $\mu_1,\dots,\mu_r$ les valeurs propres non nulles deux à deux distinctes de f^2, s'il y en a, et posons :

$$Q = X\prod_{j=1}^{r}\left(X^2-\mu_j\right)$$

Comme f^2 est diagonalisable, on a la décomposition suivante, où $\ker f^2$ est éventuellement réduit à $\{0\}$:

$$\mathbb{C}^n = \ker f^2 \oplus \bigoplus_{j=1}^{r} \ker\left(f^2-\mu_j\,\mathrm{Id}\right)$$

Il suffit donc de vérifier que $Q(f)$ est nul sur chacun de ces sous-espaces. Comme les polynômes en f commutent entre eux, on peut écrire $Q(f)$ en plaçant à droite le facteur que l'on veut. Sur $\ker f^2 = \ker f$ on place le facteur f, qui s'y annule, et sur $\ker\left(f^2-\mu_j\,\mathrm{Id}\right)$ on place le facteur $f^2-\mu_j\,\mathrm{Id}$, qui s'y annule aussi. Ainsi $Q(f) = 0$.

Enfin Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. En effet, si l'on note δ_j une racine carrée complexe de μ_j, les racines de Q sont 0 et les $\pm\delta_j$. On a $\delta_j \neq -\delta_j$ et $\delta_j \neq 0$ puisque $\mu_j \neq 0$, et deux racines associées à des indices j différents sont distinctes, car leurs carrés le sont. On en conclut que f est diagonalisable.

Remarque

On remarque que l'hypothèse sur $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ est nécessaire. En effet l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a un carré nul, il n'est pas diagonalisable, et son noyau est égal à son image. Le résultat tombe aussi en défaut sur $\mathbb{R}$, par exemple la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du plan a pour carré $-\mathrm{Id}$ et vérifie $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, mais elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, car son polynôme caractéristique X^2+1 n'y est pas scindé.

---

7 Inversibilité d'un polynôme d'endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit μ_u son polynôme minimal. On considère $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et μ_u sont premiers entre eux.

Supposons dans un premier temps que P et μ_u sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $UP+V\mu_u = 1$, et en évaluant cette égalité en u on obtient :

$$U(u)\circ P(u) + V(u)\circ \mu_u(u) = \mathrm{Id}_E$$

Or $\mu_u(u) = 0$, donc $U(u)\circ P(u) = \mathrm{Id}_E$. Comme E est de dimension finie, on en déduit que $P(u)$ est inversible, d'inverse $U(u)$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée en supposant que P et μ_u ne sont pas premiers entre eux, et on cherche un vecteur non nul dans le noyau de $P(u)$. Notons D leur pgcd, qui est de degré au moins 1, et écrivons :

$$\mu_u = DR \qquad \text{et} \qquad P = DP_1$$

Comme $\deg D \geq 1$, on a $\deg R < \deg \mu_u$ avec R non nul, donc par définition du polynôme minimal, R n'annule pas u, autrement dit $R(u) \neq 0$. De plus on remarque que :

$$PR = DP_1R = P_1\mu_u \qquad \text{donc} \qquad P(u)\circ R(u) = P_1(u)\circ \mu_u(u) = 0$$

Comme $R(u) \neq 0$, il existe $y \in E$ tel que $x = R(u)(y)$ soit non nul, et l'égalité précédente donne $P(u)(x) = 0$. Ainsi $P(u)$ n'est pas injectif, donc il n'est pas inversible, d'où le résultat.

Remarque

Pour $P = X$, on retrouve un résultat du cours, à savoir que u est inversible si, et seulement si, $\mu_u(0) \neq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$, puisque les racines de μ_u sont les valeurs propres de u. De même, sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P ne s'annule en aucune valeur propre de u.

---

8 Multiplications à gauche et à droite

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui à M associe $AM+MB$. On se propose de montrer que les valeurs propres de Φ sont exactement les sommes $\lambda+\mu$, où λ décrit $\mathrm{Sp}(A)$ et μ décrit $\mathrm{Sp}(B)$.

1. Traiter le cas où $A = 0$, puis le cas où $B = 0$.

Supposons dans un premier temps que $A = 0$, de sorte que $\Phi(M) = MB$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note L_i la i-ème ligne de M, et on remarque que la i-ème ligne de MB est L_iB. Ainsi l'égalité $MB = \mu M$ équivaut à $L_iB = \mu L_i$ pour tout i, ce qui s'écrit, en transposant, $B^\top L_i^\top = \mu L_i^\top$. On est donc ramené à des vecteurs propres de $B^\top$, et on rappelle que $B^\top$ a le même spectre que B, puisque $\chi_{B^\top} = \chi_B$.

Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $M \neq 0$ telle que $MB = \mu M$. La matrice M a au moins une ligne L_i non nulle, et $L_i^\top$ est alors un vecteur propre de $B^\top$ associé à μ, donc $\mu \in \mathrm{Sp}\left(B^\top\right) = \mathrm{Sp}(B)$. Réciproquement, soit $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, il existe une colonne W non nulle telle que $B^\top W = \mu W$, c'est-à-dire en transposant $W^\top B = \mu W^\top$. La matrice M dont toutes les lignes sont égales à $W^\top$ est non nulle et vérifie $MB = \mu M$, donc $\mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$. Finalement $\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathrm{Sp}(B)$.

Si $B = 0$, on a $\Phi(M) = AM$, et on raisonne de la même façon sur les colonnes, sans avoir besoin de transposer, puisque la j-ème colonne de AM est AK_j, où K_j est la j-ème colonne de M. Si $AM = \lambda M$ avec $M \neq 0$, une colonne non nulle de M est un vecteur propre de A associé à λ, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Réciproquement, si $AU = \lambda U$ avec $U \neq 0$, la matrice dont toutes les colonnes sont égales à U est non nulle et vérifie $AM = \lambda M$. Ainsi $\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathrm{Sp}(A)$.

2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$. Construire une matrice M non nulle de rang 1 telle que $\Phi(M) = (\lambda + \mu) M$.

On s'inspire de la question précédente. Lorsque $B = 0$, on a utilisé une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A, et lorsque $A = 0$, une matrice dont les lignes sont des transposées de vecteurs propres de B^T. On cherche donc une matrice qui ait ces deux propriétés à la fois, ce qui nous amène à poser $M = UW^\mathsf{T}$, où U est un vecteur propre de A et W un vecteur propre de B^T.

Soient donc U une colonne non nulle telle que $AU = \lambda U$, et W une colonne non nulle telle que $B^\mathsf{T}W = \mu W$, qui existe puisque $\mathrm{Sp}\left(B^\mathsf{T}\right) = \mathrm{Sp}(B)$. On note $w_1, \dots, w_n$ les coordonnées de W, la j-ème colonne de $M = UW^\mathsf{T}$ est alors $w_j U$. Comme $W \neq 0$, l'une de ces colonnes est non nulle, et comme elles sont toutes colinéaires à U, la matrice M est de rang 1. De plus $W^\mathsf{T}B = \left(B^\mathsf{T}W\right)^\mathsf{T} = \mu W^\mathsf{T}$, d'où :

$$\Phi(M) = (AU)W^\mathsf{T} + U\left(W^\mathsf{T}B\right) = \lambda UW^\mathsf{T} + \mu UW^\mathsf{T} = (\lambda + \mu)M$$

Ainsi $\lambda + \mu$ est une valeur propre de Φ.

3. Réciproquement, soient $\nu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $M \neq 0$ telle que $\Phi(M) = \nu M$. Montrer que $P(A)M = MP(\nu I_n - B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, puis conclure.

L'égalité $\Phi(M) = \nu M$ s'écrit $AM + MB = \nu M$, c'est-à-dire $AM = M(\nu I_n - B)$. Montrons par récurrence que $A^k M = M(\nu I_n - B)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$, et si c'est vrai au rang k, alors :

$$A^{k+1}M = A\left(A^k M\right) = AM(\nu I_n - B)^k = M(\nu I_n - B)(\nu I_n - B)^k = M(\nu I_n - B)^{k+1}$$

d'où le résultat au rang $k+1$. Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on en déduit par combinaison linéaire :

$$P(A)M = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = M \sum_{k=0}^{d} a_k (\nu I_n - B)^k = MP(\nu I_n - B)$$

Pour conclure, on cherche une valeur propre λ de A telle que $\nu - \lambda$ soit une valeur propre de B. On choisit pour cela un polynôme P qui annule A et dont on connaît les racines, à savoir le polynôme caractéristique de A. Il est scindé sur $\mathbb{C}$, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines répétées avec leur multiplicité, de sorte que :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, et l'égalité précédente avec $P = \chi_A$ donne alors :

$$0 = \chi_A(A)M = M\chi_A(\nu I_n - B) = M \prod_{i=1}^{n} ((\nu - \lambda_i) I_n - B)$$

Si toutes les matrices $(\nu - \lambda_i) I_n - B$ étaient inversibles, leur produit le serait aussi, et en multipliant à droite par son inverse on obtiendrait $M = 0$, ce qui est exclu. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\nu - \lambda_i) I_n - B$ ne soit pas inversible, c'est-à-dire tel que $\nu - \lambda_i \in \mathrm{Sp}(B)$. Ainsi $\nu = \lambda_i + (\nu - \lambda_i)$ est la somme d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B, et avec la question précédente on en conclut que :

$$\mathrm{Sp}(\Phi) = \{\lambda + \mu \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$$

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que, pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AM + MB = C$ d'inconnue M ait une unique solution.

L'équation $AM + MB = C$ s'écrit $\Phi(M) = C$. Elle a une unique solution pour toute matrice C si, et seulement si, Φ est bijectif. Comme Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie, c'est équivalent à $\ker\Phi = \{0\}$,

c'est-à-dire à $0 \notin \mathrm{Sp}(\Phi)$. Or d'après la question précédente, 0 est valeur propre de Φ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ tels que $\lambda+\mu=0$, autrement dit si, et seulement si, A et $-B$ ont une valeur propre commune. La condition cherchée est donc :

$$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(-B) = \emptyset$$

Remarque

On remarque que pour $B=-A$ la condition n'est jamais vérifiée, ce que l'on voit aussi directement, puisque $\Phi(I_n) = A - A = 0$ et donc Φ n'est pas injectif.

Pour la culture, l'équation $AM+MB=C$ s'appelle l'équation de Sylvester. Elle permet par exemple de montrer que si $A, A', C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(A') = \emptyset$, alors les deux matrices suivantes sont semblables :

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

En effet, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $R = \begin{pmatrix} I_n & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, et on vérifie par un calcul par blocs que R est inversible et que :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -M \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R^{-1}TR = \begin{pmatrix} A & AM - MA' + C \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de choisir M telle que $AM - MA' = -C$, ce qui est possible d'après le résultat de cette question appliqué à A et à $B = -A'$, puisque $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(A') = \emptyset$.