1 Pic en zéro

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$, puis sa convergence uniforme sur $[a,1]$, avec $a \in]0,1[$, et sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On distingue deux cas :

- Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $x \in]0,1]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{1}{n^2x^2}$ puisque $e^{-x} \leq 1$, et donc $f_n(x) \to 0$.

La suite (f_n) converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

Sur $[a,1]$, le réel x reste éloigné de 0, ce qui permet de majorer $|f_n - f| = f_n$ indépendamment de x. Pour tout $x \in [a,1]$, on a en effet $n^2x^2 \geq n^2a^2$ et $e^{-x} \leq 1$, donc :

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2a^2}$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, ainsi $\sup\limits_{[a,1]} |f_n - f| \to 0$, et la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

Sur $[0,1]$ en revanche, les fonctions f_n sont continues alors que la limite f ne l'est pas en 0. Si la convergence était uniforme sur $[0,1]$, la fonction f serait continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues, ce qui n'est pas le cas. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.

Remarque

On remarque que la convergence n'est pas non plus uniforme sur $]0,1]$, où la limite est pourtant la fonction nulle, qui est continue. L'argument précédent ne s'applique plus, mais la suite de points $x_n = \frac{1}{n}$ convient, en effet :

$$\sup_{]0,1]} |f_n - f| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1/n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

On aurait aussi pu raisonner par l'absurde avec le théorème de la double limite. Chaque fonction f_n tend vers 1 en 0, donc si la convergence était uniforme sur $]0,1]$, la limite simple tendrait elle aussi vers 1 en 0, alors qu'elle est nulle.

2. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

La convergence n'étant pas uniforme sur $[0,1]$, on ne peut pas appliquer le théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale sur un segment. En revanche les fonctions f_n sont toutes majorées par 1, ce qui suggère d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) sur $[0,1]$, pour cela on vérifie ses hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.
- La suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f, qui est continue par morceaux puisqu'elle est nulle sur $]0,1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

l'intégrale de f étant nulle, puisque f est nulle sauf en 0.

Remarque

On peut préciser la vitesse de convergence. Le changement de variable affine $y = nx$ fournit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nu_n = \int_0^n \frac{e^{-y/n}}{1+y^2}\,dy$$

En prolongeant l'intégrande par 0 sur $]n, +\infty[$, on obtient une suite de fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, qui converge simplement vers $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ et qui est dominée par cette même fonction, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée donne alors :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

---

2 Approcher la valeur absolue

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Soit $x \in [-1,1]$. Comme $x^2 + \frac{1}{n} \to x^2$ lorsque n tend vers $+\infty$, la continuité de la racine carrée en x^2 fournit :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x^2} = |x|$$

La suite (f_n) converge donc simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction valeur absolue, que l'on note f.

2. Justifier que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Qu'en est-il de la fonction limite ? Que peut-on en déduire pour la suite (f_n) ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque $x^2 + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$. Comme la racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, avec :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

La fonction limite f n'est en revanche pas dérivable en 0, ses dérivées à gauche et à droite y valant -1 et 1. Elle n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

On ne peut rien en déduire sur la convergence uniforme de (f_n), puisque contrairement à la continuité, aucun théorème du cours n'affirme qu'une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

En revanche, on peut en déduire que la suite des dérivées (f_n') ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$. En effet les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[-1,1]$ et la suite (f_n) y converge simplement vers f, donc si la suite (f_n') convergeait uniformément sur $[-1,1]$, le théorème de dérivation d'une limite montrerait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$, ce qui n'est pas le cas.

Remarque

On peut le vérifier directement. On a $f_n'(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $x \neq 0$:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{|x|}$$

La suite (f_n') converge donc simplement vers la fonction qui vaut -1 sur $[-1,0[$, 0 en 0 et 1 sur $]0,1]$. Cette limite n'est pas continue en 0, alors que les fonctions f_n' le sont, donc la convergence de (f_n') n'est pas uniforme sur $[-1,1]$.

3. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n). Conclusion?

Il s'agit de majorer $f_n(x) - |x|$ indépendamment de x. Cette quantité est une différence de deux racines carrées, que l'on transforme en multipliant par la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$, on obtient ainsi :

$$f_n(x) - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

Le dénominateur est minoré par $\sqrt{\frac{1}{n}}$, avec égalité pour $x = 0$, d'où :

$$0 \leq f_n(x) - |x| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - |x|| = f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Cette borne supérieure tend vers 0, ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$.

On en conclut qu'une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$, ni même dérivable. Dans le théorème de dérivation d'une limite, la convergence uniforme de (f_n) ne suffit donc pas, et c'est bien sur la suite des dérivées que porte l'hypothèse de convergence uniforme.

Remarque

Pour la culture, d'après le théorème de Weierstrass, toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. La convergence uniforme ne préserve donc aucune régularité au-delà de la continuité.

---

3 Urne à composition aléatoire

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$.

On ne connaît pas d'expression simple de la somme intérieure $\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j}$, on ne cherche donc pas à calculer les deux sommes l'une après l'autre. On remarque en revanche que la somme porte sur le carré $[\![1,n]\!]^2$, qui ne change pas lorsque l'on échange i et j, et que cet échange transforme $\frac{i}{i+j}$ en $\frac{j}{i+j}$, dont la somme avec $\frac{i}{i+j}$ vaut 1.

Notons S la somme étudiée. En échangeant les noms des indices i et j, puis en intervertissant les deux sommes, ce qui est licite puisqu'elles sont finies, on obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{j}{j+i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{i+j}$$

En ajoutant les deux expressions de S, il vient alors :

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j}{i+j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$$

d'où $S = \frac{n^2}{2}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On y prélève, avec remise, deux jetons l'un après l'autre. Si n et m sont les numéros sortis, on remplit une deuxième urne avec n boules vertes et m boules rouges. Enfin, on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit verte?

L'expérience se déroule en deux temps, et la composition de la deuxième urne n'est connue qu'une fois les deux jetons tirés. On conditionne donc par le résultat des deux premiers tirages, à l'aide de la formule des probabilités totales.

Pour $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, on note $A_{i,j}$ l'événement « le premier jeton porte le numéro i et le second le numéro j », et l'on note V l'événement « la boule tirée est verte ». Les tirages se faisant avec remise, les N^2 couples de numéros sont équiprobables, donc :

$$\mathbb{P}(A_{i,j}) = \frac{1}{N^2}$$

Les événements $A_{i,j}$, pour $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, forment un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Sachant $A_{i,j}$, la deuxième urne contient i boules vertes et j boules rouges, dans laquelle on tire une boule au hasard, donc :

$$\mathbb{P}(V \mid A_{i,j}) = \frac{i}{i+j}$$

La formule des probabilités totales et la question 1 fournissent alors :

$$\mathbb{P}(V) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(V \mid A_{i,j}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{i}{i+j} = \frac{1}{N^2} \times \frac{N^2}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Ce résultat était-il prévisible ?

Oui, en effet le premier numéro donne le nombre de boules vertes et le second celui des boules rouges, et les deux numéros sont tirés de la même façon, si bien que les deux couleurs jouent des rôles symétriques. On peut le rédiger ainsi.

Notons $R = \overline{V}$ l'événement « la boule tirée est rouge ». Pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, on a :

$$\mathbb{P}(R \mid A_{i,j}) = \frac{j}{i+j} = \mathbb{P}(V \mid A_{j,i})$$

et comme $\mathbb{P}(A_{i,j}) = \mathbb{P}(A_{j,i})$, la formule des probabilités totales fournit, en échangeant les noms des indices :

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(A_{j,i})\mathbb{P}(V \mid A_{j,i}) = \mathbb{P}(V)$$

Or $\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(R) = 1$, donc $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{2}$, sans aucun calcul de somme. C'est exactement l'argument de la question 1, lu en termes de probabilités.

Remarque

On remarque que tout repose sur cette symétrie entre les deux tirages. Si par exemple le premier numéro était tiré dans $[\![1,N]\!]$ et le second dans $[\![1,2N]\!]$, le résultat ne serait plus $\frac{1}{2}$. Pour $N = 1$, la deuxième urne contiendrait ainsi une boule verte et une ou deux boules rouges, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacune, et l'on trouverait :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

---

4 Tirage d'un entier naturel

On tire un entier naturel non nul, de sorte que la probabilité de tirer $n \in \mathbb{N}^*$ soit égale à $\frac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « n est un multiple de k ».

1. Calculer la probabilité de A_k.

L'univers est ici $\mathbb{N}^*$, et la probabilité de l'énoncé est bien définie, puisque les réels $\frac{1}{2^n}$ sont positifs et de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement A_k est l'ensemble des entiers de la forme km avec $m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire la réunion des

singletons $\{km\}$, qui sont deux à deux disjoints. Par σ-additivité, $\mathbb{P}(A_k)$ est donc la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2^k} \in]0,1[$:

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{km\}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{km}} = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k-1}$$

On retrouve bien $\mathbb{P}(A_1) = 1$, tout entier étant multiple de 1.

Remarque

On ne pouvait pas choisir l'entier « uniformément » dans $\mathbb{N}^*$. En effet, si tous les singletons avaient la même probabilité c, la σ-additivité donnerait $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} c$, qui vaut 0 si $c = 0$ et $+\infty$ sinon, et ne peut donc pas valoir 1.

2. Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 2, montrer que A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Pour comparer $\mathbb{P}(A_p \cap A_q)$ à $\mathbb{P}(A_p)\mathbb{P}(A_q)$, il faut d'abord reconnaître l'intersection. Un entier est multiple à la fois de p et de q si, et seulement si, il est multiple de leur ppcm, donc en notant $m = \text{ppcm}(p,q)$ on a :

$$A_p \cap A_q = A_m$$

Supposons par l'absurde que A_p et A_q soient indépendants. D'après la question 1, on aurait alors :

$$\frac{1}{2^m-1} = \mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_p)\mathbb{P}(A_q) = \frac{1}{(2^p-1)(2^q-1)}$$

En passant aux inverses puis en développant, il viendrait :

$$2^m - 1 = 2^{p+q} - 2^p - 2^q + 1 \qquad \text{soit} \qquad 2^m = 2^{p+q} - 2^p - 2^q + 2$$

Cette égalité entre entiers ne fait intervenir que des puissances de 2, on cherche donc une contradiction en regardant la divisibilité par une puissance de 2. Comme $p \geq 2$ et $q \geq 2$, on a $m \geq 2$, et le membre de gauche est divisible par 4. À droite, les entiers 2^{p+q}, 2^p et 2^q sont divisibles par 4, donc le membre de droite est congru à 2 modulo 4. C'est absurde, et les événements A_p et A_q ne sont donc pas indépendants.

Remarque

On remarque que l'hypothèse $p \geq 2$ et $q \geq 2$ est nécessaire, puisque $A_1 = \mathbb{N}^*$ est indépendant de tout événement. Le cas $p = q$ est compris dans l'énoncé, et il montre que A_p n'est pas indépendant de lui-même, ce qui était prévisible puisque $\mathbb{P}(A_p)$ ne vaut ni 0 ni 1.

---

5 Trois événements

On lance $2n$ fois une pièce et on note F_k l'événement « on obtient face au k-ième lancer » pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$. La pièce est truquée et tombe sur face avec probabilité $p \in [0,1]$, les lancers étant indépendants.

1. Décrire à l'aide de $F_1, \dots, F_{2n}$ les événements A « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B « on obtient exactement un pile » et C « la séquence pile-face n'apparaît jamais ».

Il s'agit de traduire chaque phrase en une condition sur les résultats des $2n$ lancers, puis d'écrire l'ensemble des suites de résultats qui la vérifient. On convient qu'une intersection vide d'événements est l'univers tout entier.

Une alternance parfaite est déterminée par le résultat du premier lancer. Si c'est face, les lancers de rang impair donnent face et ceux de rang pair donnent pile, et inversement si c'est pile. Ainsi :

$$A = \left(\bigcap_{k=1}^{n} \left(F_{2k-1} \cap \overline{F}_{2k}\right)\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} \left(\overline{F}_{2k-1} \cap F_{2k}\right)\right)$$

et cette réunion est disjointe, les deux événements imposant des résultats contraires au premier lancer.

Obtenir exactement un pile, c'est obtenir pile à un certain rang k, et face à tous les autres :

$$B = \bigcup_{k=1}^{2n} \left(\overline{F}_k \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2n} F_j \right)$$

et cette réunion est disjointe, le rang du pile étant déterminé par l'issue.

Pour l'événement C, on montre que la séquence pile-face n'apparaît jamais si, et seulement si, les lancers donnent d'abord un certain nombre de faces, puis uniquement des piles. Une telle suite ne contient évidemment pas la séquence pile-face.

Réciproquement, supposons que la séquence pile-face n'apparaisse jamais. S'il n'y a aucun pile, la suite est formée de $2n$ faces, et elle a bien la forme annoncée. Sinon, on note r le rang du premier pile, de sorte que les lancers de rang inférieur à r donnent face. Si un face apparaissait après le rang r, on noterait s le premier rang d'un face après r, et par définition de s le lancer de rang $s-1 \geq r$ serait un pile, ce qui ferait apparaître la séquence pile-face aux rangs $s-1$ et s. Tous les lancers à partir du rang r donnent donc pile.

En notant j le nombre de faces initiales, on a donc :

$$C = \bigcup_{j=0}^{2n} \left(\bigcap_{k=1}^{j} F_k \cap \bigcap_{k=j+1}^{2n} \overline{F}_k \right)$$

et cette réunion est disjointe, j étant le nombre total de faces obtenues.

2. Calculer la probabilité des événements A, B et C.

Les lancers étant indépendants, les événements F_1, …, F_{2n} sont mutuellement indépendants, et ils le restent lorsque l'on remplace certains d'entre eux par leur contraire. La probabilité d'une intersection de F_k et de $\overline{F}_k$ portant sur des rangs distincts est donc le produit des p et des $1-p$ correspondants. D'après la question 1, il ne reste plus qu'à additionner les probabilités des événements disjoints qui composent A, B et C.

Chacune des deux alternances comporte n faces et n piles, d'où :

$$\mathbb{P}(A) = p^n (1-p)^n + (1-p)^n p^n = 2p^n (1-p)^n$$

Chacun des $2n$ événements qui composent B comporte un pile et $2n-1$ faces, d'où :

$$\mathbb{P}(B) = 2n (1-p) p^{2n-1}$$

Enfin, l'événement d'indice j qui compose C comporte j faces et $2n-j$ piles, d'où :

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{j=0}^{2n} p^j (1-p)^{2n-j}$$

Pour calculer cette somme, on distingue deux cas :

- Si $p = \frac{1}{2}$, chacun des $2n+1$ termes vaut $\frac{1}{2^{2n}}$, et donc $\mathbb{P}(C) = \dfrac{2n+1}{4^n}$.
- Si $p \neq \frac{1}{2}$, on reconnaît la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n} a^j b^{2n-j}$ avec $a = p$ et $b = 1-p$ distincts, qui apparaît dans la factorisation de $b^{2n+1} - a^{2n+1}$ par $b - a = 1 - 2p$, d'où :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{(1-p)^{2n+1} - p^{2n+1}}{1-2p}$$

On remarque que cette dernière formule donne $\mathbb{P}(C) = 1$ pour $p = 0$ et pour $p = 1$, ce qui est attendu puisque l'on obtient alors uniquement des piles, ou uniquement des faces.

Remarque

Pour le motif pile-pile, la situation est différente. Les suites de N lancers qui ne contiennent pas deux piles consécutifs n'ont plus de forme aussi simple, et l'on montre que leur nombre est le terme d'indice $N+2$ de la suite de Fibonacci définie par $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ et $\varphi_{k+2} = \varphi_{k+1} + \varphi_k$. Par exemple, pour $N = 3$, on en compte $\varphi_5 = 5$.

---

6 Domination

Soient $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\alpha \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) dx$$

1. Montrer que la fonction $\varphi_\alpha : u \mapsto \dfrac{\ln(1+u^\alpha)}{u}$ est bornée sur $]0, +\infty[$, et que $\varphi_1 \leq 1$. En déduire que I_n est bien défini pour tout $n \geq 1$.

Pour montrer que φ_α est bornée, on étudie son comportement aux deux bornes de $]0, +\infty[$, sur lequel elle est continue et positive.

En 0, on a $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{\sim} v$ et u^α tend vers 0, donc :

$$\varphi_\alpha(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^\alpha}{u} = u^{\alpha-1}$$

qui tend vers 1 si $\alpha = 1$ et vers 0 si $\alpha > 1$, ce qui servira à la question suivante.

En $+\infty$, pour $u \geq 1$, on a $1 + u^\alpha \leq 2u^\alpha$, et par croissance du logarithme :

$$0 \leq \varphi_\alpha(u) \leq \frac{\ln(2) + \alpha \ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.

La fonction φ_α admet donc des limites finies en 0 et en $+\infty$. Il existe ainsi deux réels $0 < a < b$ tels que $\varphi_\alpha \leq 2$ sur $]0, a]$ et $\varphi_\alpha \leq 1$ sur $[b, +\infty[$, et φ_α est bornée sur le segment $[a, b]$, comme toute fonction continue sur un segment. On en déduit que φ_α est bornée sur $]0, +\infty[$, et l'on note C_α un majorant. Pour $\alpha = 1$, l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ fournit directement $\varphi_1 \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $g_n : x \mapsto n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)$, qui est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Pour la comparer à f, on fait apparaître φ_α, ce qui demande de distinguer selon que $f(x)$ est nul ou non :

- Si $f(x) = 0$, alors $g_n(x) = 0$.
- Si $f(x) > 0$, on pose $u = \frac{f(x)}{n} > 0$, et l'on a $g_n(x) = nu\,\varphi_\alpha(u) = f(x)\,\varphi_\alpha\left(\frac{f(x)}{n}\right) \leq C_\alpha f(x)$.

Ainsi $0 \leq g_n \leq C_\alpha f$ sur $\mathbb{R}$, et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction g_n l'est aussi par comparaison de fonctions positives. L'intégrale I_n est donc bien définie.

2. Déterminer la limite de (I_n), en distinguant les cas $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

La domination a été obtenue à la question 1, et l'on cherche donc à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (g_n). Il reste à déterminer sa limite simple, pour laquelle on réutilise l'écriture à l'aide de φ_α.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$. Alors $\frac{f(x)}{n}$ tend vers 0 par valeurs strictement positives, et $g_n(x) = f(x)\,\varphi_\alpha\left(\frac{f(x)}{n}\right)$. D'après l'étude de φ_α en 0, on distingue deux cas :

- Si $\alpha = 1$, on a $\varphi_1(u) \to 1$ lorsque $u \to 0$, donc $g_n(x)$ tend vers $f(x)$.
- Si $\alpha > 1$, on a $\varphi_\alpha(u) \to 0$ lorsque $u \to 0$, donc $g_n(x)$ tend vers 0.

Lorsque $f(x) = 0$, on a $g_n(x) = 0$ pour tout n, et ces deux limites restent vraies. La suite (g_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers f si $\alpha = 1$, et vers la fonction nulle si $\alpha > 1$.

On vérifie alors les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- La suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f ou vers la fonction nulle, qui sont continues.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq g_n \leq C_\alpha f$, et la fonction $C_\alpha f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de n.

On en déduit que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{si } \alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{si } \alpha > 1$$

3. On suppose de plus $\alpha > 1$, et f bornée et non nulle. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^\alpha\,dx$.

D'après la question précédente, $g_n(x)$ tend vers 0, et l'on cherche à quelle vitesse. Lorsque $f(x) > 0$, l'équivalent $\ln(1+v) \underset{v\to0}{\sim} v$ fournit :

$$g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = \frac{f(x)^\alpha}{n^{\alpha-1}}$$

ce qui nous amène à poser $h_n = n^{\alpha-1} g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et à appliquer de nouveau le théorème de convergence dominée, dont on vérifie les hypothèses :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- D'après l'équivalent précédent, $h_n(x)$ tend vers $f(x)^\alpha$ lorsque $f(x) > 0$, et c'est encore vrai lorsque $f(x) = 0$. La suite (h_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers f^α, qui est continue.
- On note M un majorant de f. L'inégalité $\ln(1+v) \leq v$ fournit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq h_n(x) \leq n^{\alpha-1} \times n\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = f(x)^{\alpha-1} f(x) \leq M^{\alpha-1} f(x)$$

  et la fonction $M^{\alpha-1} f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de n.

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$n^{\alpha-1} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^\alpha\,dx$$

Pour en déduire un équivalent, il reste à vérifier que cette limite n'est pas nulle. Or f^α est continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, son intégrale est donc strictement positive, et :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^\alpha\,dx$$

Remarque

L'hypothèse « f bornée » sert à garantir que f^α est intégrable, ce qui ne découle pas de l'intégrabilité de f. Considérons par exemple la fonction continue et affine par morceaux qui est nulle en dehors des intervalles $\left[k - \frac{1}{2k^3}, k + \frac{1}{2k^3}\right]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et dont le graphe forme sur chacun d'eux un triangle de hauteur k. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, ses triangles ayant pour aires $\frac{1}{2k^2}$, mais son carré ne l'est pas, ses intégrales sur ces intervalles valant $\frac{1}{3k}$.

---

7 Règle de succession

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $N+1$ urnes $U_0, \ldots, U_N$, l'urne U_k contenant k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on y effectue des tirages successifs avec remise. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers tirages donnent une boule blanche ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La composition de l'urne n'est pas connue, mais elle l'est une fois l'urne choisie. On conditionne donc par le choix de l'urne, à l'aide de la formule des probabilités totales.

Pour $k \in [\![0, N]\!]$, on note C_k l'événement « l'urne choisie est U_k ». Les événements C_0, …, C_N forment un système complet d'événements, et l'urne étant choisie au hasard, $\mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{N+1}$ pour tout k.

Sachant C_k, les tirages se font avec remise dans l'urne U_k, qui contient k boules blanches parmi N. Ils sont donc indépendants, et chacun donne une boule blanche avec probabilité $\frac{k}{N}$, d'où $\mathbb{P}(B_n \mid C_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$, ce qui vaut bien 0 pour $k = 0$. La formule des probabilités totales fournit alors :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(C_k)\,\mathbb{P}(B_n \mid C_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

En particulier, $\mathbb{P}(B_n) \geq \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N}\right)^n = \frac{1}{N+1} > 0$, ce qui permettra de conditionner par B_n dans la suite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que B_n est réalisé, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_k ? Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$?

On connaît les probabilités de B_n sachant le choix de l'urne, et l'on cherche celles du choix de l'urne sachant B_n, ce qui conduit à utiliser la formule de Bayes. Comme $\mathbb{P}(B_n) > 0$ d'après la question 1, elle fournit, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(C_k \mid B_n) = \frac{\mathbb{P}(C_k)\,\mathbb{P}(B_n \mid C_k)}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^n}{\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{j}{N}\right)^n} = \frac{k^n}{\sum_{j=1}^{N} j^n}$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur par $(N+1)N^n$, le terme d'indice $j = 0$ étant nul. Ces probabilités croissent avec k, et l'urne la plus probable sachant B_n est donc U_N, celle qui ne contient que des boules blanches.

Lorsque n tend vers $+\infty$, on divise par N^n pour faire apparaître des puissances de nombres inférieurs ou égaux à 1 :

$$\mathbb{P}(C_k \mid B_n) = \frac{\left(\frac{k}{N}\right)^n}{1 + \sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{j}{N}\right)^n}$$

La somme du dénominateur comporte un nombre fixe de termes, qui tendent tous vers 0, puisque $0 < \frac{j}{N} < 1$. On distingue alors deux cas :

- Si $k < N$, le numérateur tend vers 0, et $\mathbb{P}(C_k \mid B_n)$ tend vers 0.
- Si $k = N$, le numérateur vaut 1, et $\mathbb{P}(C_N \mid B_n)$ tend vers 1.

Plus on a tiré de boules blanches, plus on est donc convaincu d'avoir choisi l'urne qui ne contient que des boules blanches, sans jamais en être certain.

Remarque

Pour $N = 4$ et $n = 3$, on a $\sum_{j=1}^{4} j^3 = 100$, et les probabilités sachant B_3 que l'urne choisie soit U_0, U_1, U_2, U_3 ou U_4 valent 0, $\frac{1}{100}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{27}{100}$ et $\frac{64}{100}$, alors qu'elles valaient toutes $\frac{1}{5}$ avant les tirages.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p_N la probabilité que le $(n+1)$-ième tirage donne une boule blanche, sachant que B_n est réalisé. Calculer p_N, puis déterminer sa limite lorsque N tend vers $+\infty$.

On note W l'événement « le $(n+1)$-ième tirage donne une boule blanche ». Les événements B_n et W sont réalisés tous les deux si, et seulement si, les $n+1$ premiers tirages donnent une boule blanche, c'est-à-dire $W \cap B_n = B_{n+1}$. On en déduit, à l'aide de la question 1 :

$$p_N = \mathbb{P}(W \mid B_n) = \frac{\mathbb{P}(B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

Pour faire tendre N vers $+\infty$, on remarque que ces sommes portent sur les valeurs des fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto x^n$ aux points $\frac{k}{N}$, qui découpent $[0,1]$ en N intervalles de même longueur $\frac{1}{N}$. On divise donc le numérateur et le dénominateur par N, ce qui fait apparaître des sommes de Riemann, le terme d'indice $k = 0$ étant nul. Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto x^n$ étant continues sur $[0,1]$, il vient :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^{n}\,dx = \frac{1}{n+1}$$

La seconde limite n'étant pas nulle, on obtient par quotient :

$$p_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Lorsque le nombre d'urnes est grand, la proportion de boules blanches de l'urne choisie peut prendre presque n'importe quelle valeur entre 0 et 1, et après n boules blanches, la probabilité d'en tirer une de plus est proche de $\frac{n+1}{n+2}$. Elle est supérieure à $\frac{1}{2}$, et tend vers 1 lorsque n grandit, comme à la question 2.

Remarque

Pour la culture, c'est la règle de succession de Laplace, qui l'appliquait au lever du soleil : après n levers observés, il estimait à $\frac{n+1}{n+2}$ la probabilité que le soleil se lève le lendemain. Pour un petit nombre d'urnes, la valeur est différente. Pour $N = 2$ et $n = 1$, on trouve ainsi :

$$p_2 = \frac{0+\frac{1}{4}+1}{0+\frac{1}{2}+1} = \frac{5}{6} \qquad \text{au lieu de} \qquad \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3}$$

---

8 Urne de Pólya

Une urne, dite *de Pólya*, contient au départ une boule noire et une blanche. On répète n fois l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule, à la remettre et à ajouter une boule supplémentaire de la même couleur.

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, combien l'urne contient-elle de boules à l'issue de la k-ième expérience?

Chaque expérience ajoute exactement une boule dans l'urne, quelle que soit la couleur tirée, puisque la boule tirée est remise. Partant de 2 boules, l'urne en contient donc $k+2$ à l'issue de la k-ième expérience.

On remarque aussi que les deux boules de départ restent dans l'urne, qui contient donc toujours au moins une boule blanche et au moins une boule noire. Le nombre de boules blanches à l'issue de la k-ième expérience est ainsi compris entre 1 et $k+1$, ce qui servira à la question suivante.

2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue de la k-ième expérience. Montrer que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k+1]\!]$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

La composition de l'urne à l'issue de la $(k+1)$-ième expérience ne dépend que de sa composition à l'issue de la k-ième et de la couleur tirée lors de la $(k+1)$-ième. On démontre donc le résultat par récurrence sur k, en conditionnant par la valeur de N_k à l'aide de la formule des probabilités totales.

Pour $k = 1$, la première expérience se fait dans l'urne de départ, qui contient une boule blanche et une noire. Avec probabilité $\frac{1}{2}$ on tire la blanche et $N_1 = 2$, et avec probabilité $\frac{1}{2}$ on tire la noire et $N_1 = 1$. La variable N_1 suit donc la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$, et supposons que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k+1]\!]$. Les événements $\{N_k = j\}$, pour $j \in [\![1,k+1]\!]$, forment un système complet d'événements, tous de probabilité $\frac{1}{k+1}$. Sachant $\{N_k = j\}$, l'urne contient j boules blanches parmi $k+2$, et l'on y tire une boule au hasard :

- avec probabilité $\frac{j}{k+2}$, on tire une blanche, et alors $N_{k+1} = j+1$;
- avec probabilité $\frac{k+2-j}{k+2}$, on tire une noire, et alors $N_{k+1} = j$.

Soit $i \in [\![1, k+2]\!]$. L'événement $\{N_{k+1} = i\}$ ne peut donc se produire que si $N_k = i-1$ et que l'on tire une blanche, ou si $N_k = i$ et que l'on tire une noire. La formule des probabilités totales ne fait intervenir que ces deux termes, lorsqu'ils existent, et l'on distingue trois cas :

- Si $i \in [\![2, k+1]\!]$, les deux termes sont présents, et :

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = i) = \frac{1}{k+1} \times \frac{i-1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{k+2-i}{k+2} = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

- Si $i = 1$, seul le second terme est présent, puisque $N_k \geq 1$, et $\mathbb{P}(N_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$.
- Si $i = k+2$, seul le premier terme est présent, puisque $N_k \leq k+1$, et $\mathbb{P}(N_{k+1} = k+2) = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$.

Dans tous les cas $\mathbb{P}(N_{k+1} = i) = \frac{1}{k+2}$, ainsi N_{k+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, k+2]\!]$, ce qui achève la récurrence.

Remarque

Une autre méthode aurait été d'utiliser la formule des probabilités composées. Au moment de la m-ième expérience, l'urne contient $m+1$ boules, et au moment de tirer la ℓ-ième boule blanche, elle contient ℓ blanches, de même pour les noires. La probabilité d'obtenir lors des k premières expériences une suite de couleurs donnée, comportant b blanches et $k-b$ noires, vaut donc :

$$\frac{(1 \times 2 \times \cdots \times b) \times (1 \times 2 \times \cdots \times (k-b))}{2 \times 3 \times \cdots \times (k+1)} = \frac{b!(k-b)!}{(k+1)!}$$

Cette probabilité ne dépend pas de l'ordre des couleurs, et comme il y a $\binom{k}{b}$ telles suites, on retrouve :

$$\mathbb{P}(N_k = b+1) = \binom{k}{b} \frac{b!(k-b)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$