Corrigé du D.S. n° 4 de mathématiques

Exercice 1 tiré de Centrale-Supélec 2023 MP-MPI Math 2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ est convergente.

2) Justifier l'existence de K_n et montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.

3) Montrer que $J_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$. et en déduire que $J_n \underset{n\to\infty}{\sim} K_n$.

4) Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

5) Exprimer K_n en fonction de K_1 et en déduire que $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

6) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, +\infty[$. Montrer que $\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \leq \dfrac{1}{1+u^2}$.

7) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du$.

8) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

---

1) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ est impropre en $+\infty$. Pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$, or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente, donc la première intégrale aussi.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale K_n est impropre en $+\infty$. Or $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ qui ne change pas de signe, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$ converge d'après le critère de Riemann car $2n \geq 2 > 1$. Donc l'intégrale K_n converge aussi.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{2t}{(1+t^2)^n}$. Par croissance de l'intégrale, pour tout réel $a > 1$,

$$0 \leq \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^a \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[-\frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}}\right]_1^a = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(1+a^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$

Les inégalités larges passent à la limite $a \to +\infty$, d'où : $0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 < 1+t^2 \leq 2$, donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq \dfrac{1}{2^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

D'où

$$K_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = J_n + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

d'après la question précédente. Or $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq J_n$, d'où $K_n = J_n + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n} J_n\right) = J_n + \underset{n\to\infty}{o}(J_n)$. Donc $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} J_n$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$(uv)(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^{2n}} = \frac{1}{t^{2n-1}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $2n-1 \geq 1$. D'après le théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 0 - 0 + 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = K_n$ converge d'après la question 2.

Donc

$$K_n = 2n\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t = 2n(K_n - K_{n+1}).$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$ d'après la question précédente. On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2} K_1.$$

D'après la formule de Stirling,

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot 4^n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{4^n \cdot 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc

$$\frac{(2n-2)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

De plus, $K_1 = \frac{\pi}{2}$ car

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^x = \arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

6) D'après la formule du binôme de Newton, $\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{u^2}{n}\right)^k \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{u^2}{n} = 1+u^2 > 0$, d'où le résultat en passant à l'inverse.

7) On pose le changement de variable $u = t\sqrt{n}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. D'où

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}.$$

Donc $\sqrt{n}\,J_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$, en posant

$$f_n(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n}, \\ 0 & \text{si } u > \sqrt{n}. \end{cases}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : u \mapsto e^{-u^2}$ sur $[0,+\infty[$, car pour tout $u \in [0,+\infty[$, à partir d'un certain rang,

$$f_n(u) = \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-u^2}$$

et f est continue sur $[0,+\infty[$. Enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,+\infty[, \quad |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$$

d'après la question précédente, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ converge (c'est K_1).

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Donc $\sqrt{n}\,J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

8) D'après les questions 3 et 5,

$$\sqrt{n}\,J_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}\,K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

donc $\sqrt{n}\,J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Or $\sqrt{n}\,J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ d'après la question précédente. Par unicité de la limite,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

PROBLÈME tiré de Centrale-Supélec 2026 PSI Math 1

On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou sur FACE avec la probabilité $q = 1-p$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au $k-$ième lancer ».

Partie 1 – Le premier PILE

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

1) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $w_n = P(E_n)$.

2) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE ? Répondre à cette question de deux manières : en utilisant la $\sigma-$additivité d'une part ; en utilisant la continuité décroissante d'autre part.

Partie 2 – Le premier double PILE

Dans cette partie, on pose $p = \frac{2}{3}$ et donc $q = \frac{1}{3}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

3) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = P(D_n)$. (La probabilité v_1 vaut 0.) Calculer v_2.

4) Exprimer $P(D_{n+2} \mid F_1)$ et $P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2)$ en fonction de v_n et de v_{n+1}.

5) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_{n+2} = \frac{1}{3}\cdot v_{n+1} + \frac{2}{9}\cdot v_n.$$

6) Calculer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

7) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ».

Partie 3 – Le premier triple Pile

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement T_n : « Le premier triple PILE apparaît au $n-$ième lancer ».

8) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(T_n)$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

9) Montrer à l'aide d'un système complet d'événements adéquat que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+3} = qu_{k+2} + pqu_{k+1} + qp^2u_k.$$

10) On pose la matrice colonne $U_k = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}^T$. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k+1} = M \cdot U_k$ et calculer le polynôme caractéristique, noté χ_M, de cette matrice M.

11) Montrer que le polynôme χ_M admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

12) Vérifier que $(X - p) \cdot \chi_M(X) = X^4 - X^3 + qp^3$ puis montrer que χ_M admet une seule racine réelle.

13) Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

14) En déduire, sans les calculer, qu'il existe $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda_1 \in]0, 1[$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

15) Montrer que A, B et C sont uniques et que $A = \dfrac{p^3}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}$.

16) Montrer que : $q < \lambda_1$, $\mathcal{R}e(\lambda_2) < 0$, $|\lambda_2 - 1| > 1$ puis que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

17) En déduire un équivalent de u_k quand k tend vers ∞.

Partie 1 – Le premier PILE

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $E_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$ et ces événements sont indépendants, donc

$$P(E_n) = P(F_1) \times \cdots \times P(F_{n-1}) \times P(\overline{F_n}) = pq^{n-1}.$$

2) Les événements E_n sont disjoints deux à deux, d'où : par $\sigma-$additivité, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k = p\dfrac{1}{1-q} = 1$ car $|q| < 1$. Donc l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$ « la pièce tombe au moins une fois sur PILE » est presque certain.

Autre méthode — Le contraire de l'événement « la pièce tombe au moins une fois sur PILE » est l'événement « la pièce tombe toujours sur FACE », égal à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_n\right)$. Or, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = q^n$ car les événements F_k sont indépendants. Et $q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|q| < 1$.

Partie 2 – Le premier double PILE

3) $D_2 = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ et ces événements sont indépendants, donc $P(D_2) = P(\overline{F_1}) \cdot P(\overline{F_2}) = \frac{4}{9}$.

4) $P(D_{n+2} \mid F_1) = v_{n+1}$ car on sait que la pièce tombe la première fois sur FACE (ce qui remet le compteur à zéro). Donc D_{n+2} se réalise si, et seulement si, on obtient le premier double PILE après encore $n + 1$ lancers.

$P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2) = v_n$ car on sait que la pièce tombe la première fois sur Pile et la deuxième fois sur Face (ce qui remet le compteur à zéro). Donc D_{n+2} se réalise si, et seulement si, on obtient le premier double PILE après encore n lancers.

5) $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1}\right)$ et $D_{n+2} \cap \overline{F_1} = \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2$ car l'événement $D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ est impossible car $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right)$. L'union est disjointe, d'où

$$P(D_{n+2}) = P\left(D_{n+2} \cap F_1\right) + P\left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right).$$

Or $P\left(D_{n+2} \cap F_1\right) = P(F_1) \cdot P(D_{n+2} \mid F_1) = \frac{1}{3} \cdot P(D_{n+2} \mid F_1)$ et

$P\left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right) = P\left(\overline{F_1} \cap F_2\right) \cdot P\left(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} \cdot P\left(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2\right)$ car les événements $\overline{F_1}$ et F_2 sont indépendants. Donc

$$v_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot v_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot v_n.$$

6) L'équation caractéristique de la suite (v_n) est $\lambda^2 = \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}$. Elle a deux solutions distinctes : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. D'où $\exists K \in \mathbb{R},\ \exists L \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = K \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + L \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Les constantes K et L sont fixées par les deux conditions initiales $v_1 = 0$ et $v_2 = \frac{4}{9}$. D'où $K = \frac{4}{3}$ et $L = \frac{2}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

7) L'événement « On n'obtient jamais de double PILE » est le contraire $\overline{D}$ de l'événement $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$. L'union est disjointe, d'où : par $\sigma-$additivité, $P(D) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = K \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + L \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. Donc $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 0$. L'événement $\overline{D}$ est donc presque impossible.

Partie 3 – Le premier triple Pile

8) Les événements T_1 et T_2 sont impossibles, d'où $u_1 = u_2 = 0$. De plus, $T_3 = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}$ et ces événements sont indépendants, donc $P(T_3) = P(\overline{F_1}) \cdot P(\overline{F_2}) \cdot P(\overline{F_3}) = p^3$.

9) On raisonne comme à la question 5, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(F_1, \overline{F_1} \cap F_2, \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3, \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$:

$$\begin{aligned} P(T_{k+3}) &= q\,P(T_{k+3} \mid F_1) + pq\,P(T_{k+3} \mid \overline{F_1} \cap F_2) + p^2q\,P(T_{k+3} \mid \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) + p^3\,P(T_{k+3} \mid \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \\ &= q\,P(T_{k+2}) + pq\,P(T_{k+1}) + p^2q\,P(T_k). \end{aligned}$$

10) Matriciellement, d'après la question précédente, $U_{k+1} = \begin{pmatrix} q & pq & p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_k = M \cdot U_k$. La matrice M est une *matrice compagnon*. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^3 - qX^2 - pqX - p^2q$ car, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-q & -pq & -p^2q \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-q)x^2 + pq(-x) - p^2q = x^3 - qx^2 - pqx - p^2q.$$

en développant suivant la première ligne.

11) $\chi_M(0) = -pq^2 < 0$ et $\chi_M(1) = 1 - q(1+p+p^2) = p^3 > 0$. La fonction χ_M étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires prouve qu'il existe au moins une racine du polynôme χ_M dans l'intervalle $]0,1[$.

12) Posons $Q = (X-p)\chi_M$. On calcule :

$$Q = (X-p)(X^3 - qX^2 - pqX - p^2q) = X^4 - (p+q)X^3 + (pq-pq)X^2 + (p^2q - p^2)X + p^3q = X^4 - X^3 + p^3q.$$

Par ailleurs, $Q' = X^2(4X-3)$ et la fonction $x \mapsto Q'(x)$ est donc strictement négative sur $]-\infty, 3/4[$ et strictement positive sur $]3/4, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto Q(x)$ s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$. Or elle s'annule en p par construction, donc χ_M s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, χ_M admet donc une unique racine réelle, qui appartient à l'intervalle $]0,1[$.

13) Notons λ_1 l'unique racine réelle de χ_M. D'après les deux questions précédentes, χ_M admet une racine réelle et deux racines conjuguées distinctes *ou* une racine triple. Si $\chi_M = (X-\lambda_1)^3$, alors $\chi'_M = 3(X-\lambda_1)^2$, ce qui contredit $\chi'_M(0) < 0$. Ainsi, χ_M admet une racine réelle et deux racines non réelles et conjuguées. La matrice M, de taille 3, possède donc 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

14) La matrice M étant diagonalisable dans $\mathbb{C}$: $\exists R \in GL_n(\mathbb{C}),\ M = RDR^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2}\right)$ et $0 < \lambda_1 < 1$ est la valeur propre réelle de M et $\lambda_2, \overline{\lambda_2}$ les deux valeurs propres conjuguées non réelles de M. Par récurrence, la relation $U_{k+1} = MU_k$ donne

$$U_k = M^{k-1}U_1 = (RDR^{-1})^{k-1}U_1 = RD^{k-1}R^{-1}U_1.$$

Alors, u_k est la dernière coordonnée du produit $RD^{k-1}R^{-1}U_1$, lequel est une combinaison linéaire des coefficients diagonaux de D^{k-1}, donc

$$\exists (A,B,C) \in \mathbb{C}^3,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

15) Des conditions initiales de la question 8, on déduit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{\lambda_2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \overline{\lambda_2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \overline{\lambda_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p^3 \end{pmatrix} \quad \textit{id est} \quad \begin{cases} A+B+C=0 & (L_1) \\ \lambda_1 A+\lambda_2 B+\bar{\lambda}_2 C=0 & (L_2) \\ \lambda_1^2 A+\lambda_2^2 B+\bar{\lambda}_2^2 C=p^3 & (L_3) \end{cases}.$$

La matrice carrée est inversible (car son déterminant est un déterminant de Vandermonde, non nul car les complexes λ_1, λ_2 et $\bar{\lambda}_2$ sont distincts deux à deux). Le système possède donc une unique solution. En particulier, de la combinaison linéaire $L_3-(\lambda_2+\bar{\lambda}_2)L_2+\lambda_2\bar{\lambda}_2 L_3$, on déduit l'équation $(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\bar{\lambda}_2)A=p^3$. Donc $A=\dfrac{p^3}{|\lambda_1-\lambda_2|^2}$.

16) On note que $\chi_M(q)=-pq<0$. Et, on l'a vu aux questions 11 et 12, la fonction χ_M est strictement négative sur $]-\infty,\lambda_1[$ et strictement positive sur $]\lambda_1,+\infty[$, d'où $\lambda_1>q$. La somme des racines de χ_M vaut $\lambda_1+2\,\mathrm{Re}(\lambda_2)=q$, d'où $\mathrm{Re}(\lambda_2)<0$. Donc $|\lambda_2-1|>\mathrm{Re}(1-\lambda_2)>1$. Enfin

$$\chi_M(\lambda_2)=0 \quad \text{, d'où} \quad \lambda_2^3=q\lambda_2^2+pq\lambda_2+p^2q \quad \text{, d'où} \quad |\lambda_2|^3=|q\lambda_2^2+pq\lambda_2+p^2q|<q|\lambda_2|^2+pq|\lambda_2|+p^2q,$$

par l'inégalité triangulaire, celle-ci étant stricte car $\arg(pq\lambda_2)\neq\arg(p^2q)=0$, d'où $\chi_M(|\lambda_2|)<0$, ce qui implique $|\lambda_2|<\lambda_1$.

17) De l'inégalité $|\lambda_2|<\lambda_1$, on tire que $\lambda_2^k=o(\lambda_1^k)$, d'où $u_k\sim A\lambda_1^{k-1}=\dfrac{p^3}{|\lambda_1-\lambda_2|^2}\,\lambda_1^{k-1}$.

Exercice 2

1) Soient un réel $x\in[0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}=u_n+\frac{x-u_n^2}{2}.$$

Montrer que, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.

2) Montrer que la suite (u_n) converge et montrer que sa limite ℓ vaut $\sqrt{x}$.

3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq\ell-u_{n+1}\leq(\ell-u_n)\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

4) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leq\ell-u_n\leq\sqrt{x}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^n.$$

5) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leq\ell-u_n\leq M_n \qquad \text{où} \quad M_0=\sqrt{2} \quad \text{et} \quad M_n=\sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n.$$

6) Soit la suite des fonctions f_n définies, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$ par

$$f_0(x)=0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{x-f_n^2(x)}{2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$.

Vers quelle fonction f ?

7) Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0,1]$.

1) On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t+\dfrac{x-t^2}{2}=-\dfrac{t^2}{2}+t+\dfrac{x}{2} \end{array}$$

de sorte que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

Montrons que $f([0,1])\subset[0,1]$: la fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1],\ f'(t)=-t+1\geq 0$, donc f est croissante sur $[0,1]$. De plus, $f(0)=\frac{x}{2}\geq 0$ et $f(1)=\frac{x+1}{2}\leq 1$. D'où $f([0,1])=\left[\frac{x}{2},\frac{x+1}{2}\right]\subset[0,1]$.

Puis $u_0=0\in[0,1]$ et, si $u_n\in[0,1]$, alors $u_{n+1}=f(u_n)\in f([0,1])\subset[0,1]$. Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$ par récurrence.

2) On a montré à la question précédente que la fonction f est croissante sur $[0,1]$ et que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$. De plus, $u_1=\frac{x}{2}\geq 0=u_0$. Donc, par récurrence, $u_{n+1}\leq u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est croissante.

Et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge donc vers un réel ℓ.

Et ℓ est un point fixe de f car f est continue, d'où :

$$f(\ell)=\ell \quad \text{d'où} \quad \ell+\frac{x-\ell^2}{2}=\ell \quad \text{d'où} \quad x=\ell^2 \iff \ell=\sqrt{x} \quad \text{ou} \quad \ell=-\sqrt{x}.$$

Donc $\ell=\sqrt{x}$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$, donc $\ell\geq 0$ car les inégalités larges passent à la limite.

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur $[u_n,\ell]$ et dérivable sur $]u_n,\ell[$, d'où

$$\exists c\in]u_n,\ell[,\ f(\ell)-f(u_n)=(\ell-u_n)\cdot f'(c)$$

d'après le théorème des accroissements finis. D'une part, $f(\ell)-f(u_n)=\ell-u_{n+1}\geq 0$. D'autre part, $f'(c)=1-c\leq 1-\frac{x}{2}$ car $c\geq u_n\geq u_1=\frac{x}{2}$. Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq \ell-u_{n+1}\leq(\ell-u_n)\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

4) Si $n=0$, alors $0\leq\ell-u_0=\ell\leq\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^0$.

Si $n=1$, alors $\ell-u_1=\sqrt{x}-\frac{x}{2}\geq 0$ car $x\in[0,1]$. De plus, $\ell\left(1-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{2}\geq\sqrt{x}-\frac{x}{2}$ car $x\in]0,1[$. Donc $0\leq\ell-u_1\leq\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

Puis la propriété se vérifie par récurrence grâce à la relation prouvée à la question précédente.

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\ell-u_n\leq\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n$.

5) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n \end{array}$$

est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Pour tout $x\in]0,1[$,

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n-\frac{n\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}-n\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x}{2}-nx\right).$$

La fonction g atteint donc son maximum en $\frac{2}{1+2n}$ et ce maximum vaut M_n. Et si $n=0$, alors $M_0=\sqrt{2}\geq\sqrt{x}$ car $x\in]0,1[$. Donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ 0\leq\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\leq M_n=\sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n.$$

6) Soit $x\in[0,1]$. On note $f_n(x)=u_n$ comme défini à la question 1. D'après la question 2, $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{x}$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.

7) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précécente,

$$\forall x\in]0,1[,\quad 0\leq\sqrt{x}-f_n(x)\leq M_n$$

qui est un majorant (car indépendant de x), donc

$$0\leq\sup_{x\in[0,1]}|\sqrt{x}-f_n(x)|\leq M_n \quad \text{car le sup est le plus petit majorant.}$$

Montrons que $M_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$:

$$M_n=\sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n=\sqrt{\frac{2}{1+2n}}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)\right).$$

Or

$$n\ln\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)=n\left(-\frac{1}{1+2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{1+2n}\right)\right)=-\frac{n}{1+2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{1+2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}.$$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^{-1/2}$. Et $\sqrt{\frac{2}{1+2n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Donc $M_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\sup_{x\in]0,1[}|\sqrt{x}-f_n(x)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}$.