D.S. n° 4 de mathématiques

Durée : 4 heures.

Cet énoncé contient deux exercices et un problème.

Les calculatrices sont interdites.

---

25 Exercice 1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ est convergente.

2) Justifier l'existence de K_n et montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.

3) Montrer que $J_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$ et en déduire que $J_n \underset{n\to\infty}{\sim} K_n$.

4) Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

5) Exprimer K_n en fonction de K_1 et en déduire que $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

6) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, +\infty[$. Montrer que $\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} \leq \dfrac{1}{1+u^2}$.

7) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du$.

8) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

Problème

On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou sur FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au $k-$ième lancer ».

Partie 1 – Le premier PILE

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

1) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $w_n = P(E_n)$.

2) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE ? Répondre à cette question de deux manières : en utilisant la $\sigma-$additivité d'une part ; en utilisant la continuité décroissante d'autre part.

Partie 2 – Le premier double PILE

Dans cette partie, on pose $p = \frac{2}{3}$ et donc $q = \frac{1}{3}$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

3) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = P(D_n)$. (La probabilité v_1 vaut 0.) Calculer v_2.

4) Exprimer $P(D_{n+2} \mid F_1)$ et $P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2)$ en fonction de v_n et de v_{n+1}.

5) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot v_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot v_n.$$

6) Calculer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

7) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ».

Partie 3 – Le premier triple Pile

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement T_n : « Le premier triple PILE apparaît au $n-$ième lancer ».

8) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(T_n)$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

9) Montrer à l'aide d'un système complet d'événements adéquat que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+3} = q u_{k+2} + pq u_{k+1} + qp^2 u_k.$$

10) On pose la matrice colonne $U_k = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}^T$. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{k+1} = M \cdot U_k$ et calculer le polynôme caractéristique, noté χ_M, de cette matrice M.

11) Montrer que le polynôme χ_M admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

12) Vérifier que $(X - p) \cdot \chi_M(X) = X^4 - X^3 + qp^3$ puis montrer que χ_M admet une seule racine réelle.

13) Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

14) En déduire, sans les calculer, qu'il existe $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda_1 \in]0,1[$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

15) Montrer que A, B et C sont uniques et que $A = \dfrac{p^3}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}$.

16) Montrer que : $q < \lambda_1$, $\mathcal{R}e(\lambda_2) < 0$, $|\lambda_2 - 1| > 1$ puis que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

17) En déduire un équivalent de u_k quand k tend vers ∞.

Exercice 2

1) Soient un réel $x \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2}.$$

Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

2) Montrer que la suite (u_n) converge et montrer que sa limite ℓ vaut $\sqrt{x}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \ell - u_{n+1} \leq (\ell - u_n) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq M_n \qquad \text{où} \quad M_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n.$$

6) Soit la suite des fonctions f_n définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par

$$f_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n^2(x)}{2}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$.

Vers quelle fonction f ?

7) Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0,1]$.