TD6. Classes de complexité P et NP

Exercice 1.
Montrer que si P $\neq$ NP, alors il n'existe aucun problème à la fois NP-complet et dans P.

Exercice 2. Coloration de graphe
Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.
On appelle k-coloration de G toute fonction $c : S \to \{1, ..., k\}$ telle que

$$\forall \{u, v\} \in A,\ c(u) \neq c(v)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose le problème k-Coloration suivant :

$$k\text{-Coloration} \begin{cases} \text{Entrée :} & \text{Un graphe non orienté } G = (S, A) \\ \text{Sortie :} & \text{Existe-t-il une } k\text{-coloration de } G? \end{cases}$$

1. Montrer que le Problème 2-coloration est dans P. (On décrira l'algorithme polynomial associé).
2. On admet que 3-coloration est NP-difficile. En déduire, par récurrence, que k-Coloration est NP-difficile pour tout $k \geq 3$.
3. Montrer que pour tout $k \geq 3$, k-Coloration est NP-complet.

Exercice 3. Problème du Sac à Dos
On admet que le problème suivant est NP-difficile :

$$\text{Sous-Ensemble} \begin{cases} \text{Entrée :} & \text{n entiers } \{e_1, ..., e_n\},\ \text{et un entier } W \\ \text{Sortie :} & \text{Existe-t-il } E \subseteq \{e_1, ..., e_n\} \text{ tq } \sum_{e \in E} e = W\ ? \end{cases}$$

En déduire que le problème du Sac à Dos décrit ci-dessous est NP-complet.

$$\text{Sac à Dos} \begin{cases} \text{Entrée :} & \text{n objets de poids } \{p_1, ..., p_n\},\ \text{et de valeur } \{v_1, ..., v_n\} \\ & \quad \text{une capacité entière } C \text{ et un objectif entier } W \\ & \\ \text{Sortie :} & \text{Existe-t-il } I \subseteq \{1, ..., n\} \text{ tq } \sum_{i \in I} v_i \geq W \text{ et } \sum_{i \in I} p_i \leq C\ ? \end{cases}$$

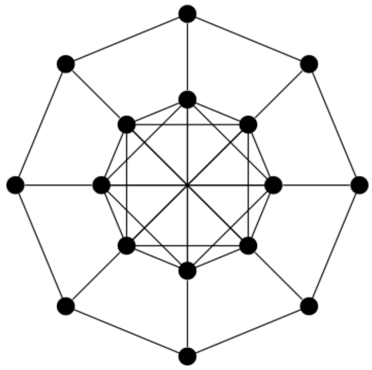
Exercice 4. Clique, Stable et couverture par des sommets
Dans cet exercice on s'intéresse à des problèmes de décision sur des graphes non orientés. Afin de définir ces problèmes, on donne d'abord quelques définitions.

Définitions : Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Soit $S' \subseteq S$ un sous ensemble de sommets.

- S' est une clique de G ssi $\forall (x, y) \in S'^2$, $x \neq y \implies \{x, y\} \in A$,
  autrement dit tous les sommets de S' sont deux à deux reliés dans G.
- S' est un stable de G ssi $\forall (x, y) \in S'^2$, $\{x, y\} \notin A$,
  autrement dit tous les sommets de S' sont deux à deux non reliés dans G.
- S' est une couverture par des sommets de G ssi $\forall \{x, y\} \in A, x \in S'$ ou $y \in S'$,
  autrement dit chaque arête de G a une extrémité dans S'.

La taille d'une clique, d'un stable ou d'une couverture par des sommets est son nombre de sommets.

1. Dans le graphe ci-dessous, exhiber une clique de taille 4, un stable de taille 5, et une couverture par sommets de taille 12.



$G = (S, A)$

2. Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté quelconque. Exhiber un stable, une clique et une couverture des sommets de G.

On considère les trois problèmes suivants :

- Clique $\begin{cases} \text{Entrée : } & \text{Un graphe non orienté } G = (S, A) \text{, un seuil } K \in \mathbb{N} \\ \text{Sortie : } & \text{Existe-t-il une clique de G de taille } \geq K \text{ ?} \end{cases}$

- Stable $\begin{cases} \text{Entrée : } & \text{Un graphe non orienté } G = (S, A) \text{, un seuil } K \in \mathbb{N} \\ \text{Sortie : } & \text{Existe-t-il un stable de G de taille } \geq K \text{ ?} \end{cases}$

- Couv.Sommet $\begin{cases} \text{Entrée : } & \text{Un graphe non orienté } G = (S, A) \text{, un seuil } K \in \mathbb{N} \\ \text{Sortie : } & \text{Existe-t-il une couverture par des sommets de G de taille } \leq K \text{ ?} \end{cases}$

3. Montrer que Clique $\leq_P$ Stable et Stable $\leq_P$ Clique.
4. Montrer que Couv.Sommets $\leq_P$ Clique et Clique $\leq_P$ Couv.Sommets.

Réduction Polynomiale de 3-SAT à Clique.
On fixe une entrée du problème 3-SAT représentée par un ensemble de $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ de clauses disjonctives sur un ensemble de variables propositionnelles $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
Pour $i \in \{1, ..., m\}$, la clause C_i est composée de trois littéraux, que l'on note $(l_{i,j})_{j \in \{0,1,2\}}$. On considère alors le graphe non orienté $G = (S, A)$ définit comme suit :

$$S = \{(i, j) \mid i \in \{1, ..., m\}, j \in \{0, 1, 2\}\}$$

$$A = \{\{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} \mid l_{i_1,j_1} \neq \neg l_{i_2,j_2} \text{ et } \neg l_{i_1,j_1} \neq l_{i_2,j_2} \text{ et } i_1 \neq i_2\}$$

5. Représenter le graphe pour l'instance $\{x \vee x \vee y,\ \neg x \vee \neg y \vee \neg y,\ \neg x \vee y \vee y\}$.
6. Montrer que Clique est NP-difficile. On pourra utiliser la réduction suggérée.
7. Montrer que Clique, Stable et Couv.Sommets sont NP-complets.