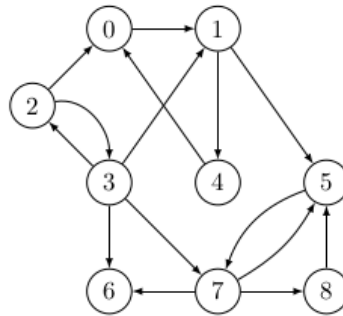


TD7. Graphes avancés

Recherche des composantes fortement connexes

Exercice 1. Application de l'algorithme de Kosaraju (*)

On considère le graphe G suivant :



1. En calculer les composantes fortement connexes via l'algorithme de Kosaraju.
2. En déduire le graphe des composantes fortement connexes associé.

Exercice 2. Semi-connexité (**)

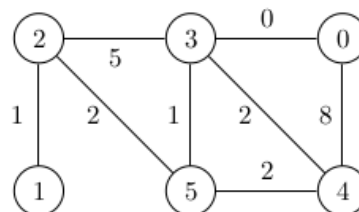
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On dit que G est semi-connexe si pour tout $(s, t) \in S$ il existe un chemin de s à t ou un chemin de t à s .

1. Donner un exemple de graphe orienté à 4 sommets, sans cycle, non semi-connexe et tel que le graphe obtenu en en supprimant les orientations est connexe.
2. Si G est acyclique, on peut considérer ses sommets dans un ordre topologique $(s_0, \dots, s_{n-1})$. Montrer que G est semi-connexe si et seulement si pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$, $(s_i, s_{i+1}) \in A$.
3. En déduire la complexité d'un algorithme qui teste la semi-connexité d'un graphe acyclique.
4. Soit G un graphe orienté quelconque. Montrer que G est semi-connexe ssi le graphe de ses composantes fortement connexes est semi-connexe.
5. En déduire un algorithme qui décide si un graphe orienté est semi-connexe.

Arbres couvrants de poids minimaux

Exercice 3. Évolution d'une structure Union-Find (*)

On considère le graphe G suivant :



Appliquer l'algorithme de Kruskal à G en indiquant à chaque étape l'évolution du tableau représentant les partitions des sommets de G en supposant que ce dernier rend compte d'une structure union-find implémentée de manière arborescente naïve.

Exercice 4. Arbres couvrants minimaux et arêtes de poids minimal (★★)

On considère un graphe $G = (S, A)$ non orienté, pondéré via une fonction de pondération $c : A \rightarrow \mathbb{N}$ injective (tous les poids des arêtes sont donc distincts) et tel que $|A| \geq 3$. Soit T un arbre couvrant minimal de G .

1. Si T' est un arbre couvrant minimal de G , montrer que $T = T'$.
2. Montrer que T contient les deux arêtes de poids minimal de A .
3. Montrer que T ne contient pas nécessairement les trois arêtes de poids minimal de A .
4. Montrer que pour chaque cycle de G , T ne contient pas l'arête de poids maximal du cycle.
5. T contient-il l'arête de poids minimal de chaque cycle ?

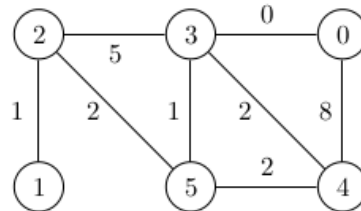
Exercice 5. Algorithme de Prim (★★)

On considère un graphe $G = (S, A)$ non orienté, connexe, pondéré par une fonction de poids $p : A \rightarrow \mathbb{N}$. On souhaite calculer un arbre couvrant minimal de G via l'algorithme de Prim décrit ci dessous :

```

Prim( $G$ ) =
 $E \leftarrow \emptyset$ 
 $V \leftarrow \{s_0\}$  où  $s_0$  est un élément de  $S$  pris au hasard
 $F \leftarrow S \setminus \{s_0\}$ 
tant que  $F \neq \emptyset$ 
    Choisir une arête  $(u, v) \in A$  telle que  $u \in V, v \notin V$  et  $p(u, v)$  est minimal
     $F \leftarrow F \setminus \{v\}$ 
     $E \leftarrow E \cup \{(u, v)\}$ 
     $V \leftarrow V \cup \{v\}$ 
renvoyer  $(V, E)$ 
  
```

1. Appliquer cet algorithme au graphe suivant avec $s_0 = 0$.



2. Montrer qu'à tout instant, V et F forment une partition de l'ensemble S des sommets.
3. Montrer la terminaison de cet algorithme.
4. Montrer que "le graphe (V, E) est inclus dans un arbre couvrant minimal de G " est un invariant de boucle.
5. En déduire la correction de l'algorithme.

Couplages

Exercice 6. Modélisation et couplages (★)

Une compagnie aérienne dispose de 5 avions a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 qu'elle fait voler sur 5 lignes aériennes l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 .

Tous les avions ne peuvent pas voler sur toutes les lignes, plus précisément : a_1 ne peut assurer que la liaison l_1 , a_2 les liaisons l_1 et l_2 , a_3 les liaisons l_1, l_3, l_4, l_5 , a_4 les liaisons l_3, l_4, l_5 et a_5 les liaisons l_1, l_2 .

1. Dessiner un graphe modélisant la situation.
2. Déterminer un couplage maximum dans ce graphe en expliquant l'algorithme utilisé et en déduire combien de liaisons la compagnie peut assurer simultanément au maximum.

Exercice 7. Couverture par dominos (★)

On considère un échiquier de taille $n \times n$ contenant des pièces sur certaines cases. On souhaite savoir s'il est possible de recouvrir toutes les cases inoccupées de l'échiquier à l'aide de dominos de longueur 2 et largeur 1.

En modélisant le problème par un graphe biparti qu'on explicitera, décrire un algorithme permettant de répondre à cette question.

Exercice 8. Caractérisation des graphes bipartis (★★)

1. Rappeler la définition d'un graphe biparti.
 2. Montrer qu'un arbre est un graphe biparti. Préciser la bipartition associée.
 3. Montrer qu'un graphe est biparti ssi toutes ses composantes connexes le sont.
- Ce dernier résultat montre que pour détecter si un graphe est biparti, il suffit de travailler composante connexe par composante connexe. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que G est connexe.
4. Montrer qu'un graphe connexe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Indication : pour la réciproque, raisonner par l'absurde et considérer un arbre couvrant du graphe.

Exercice 9. Couplage parfait (★★)

Un couplage parfait d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un sous-ensemble $C \subseteq A$ tel que tout sommet de G est l'extrémité d'exactlyement une et une seule arête de C . On note $c(G)$ le nombre de couplages parfaits de G .

1. Soit G un graphe connexe à n sommets. Montrer que $c(G) \geq 1 \implies n$ pair. L'implication réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un graphe connexe à n sommets tel que $c(G) = 1$.
3. Soit $s \in S$ un sommet quelconque de G . Montrer que

$$c(G) = \sum_{\{s,t\} \in A} c(G \setminus \{s,t\})$$

où $G \setminus \{s,t\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets s, t , ainsi que toutes les arêtes qui leur sont adjacentes.

Exercice 10. Théorème de König (★★★)

Si G est un graphe non orienté, non pondéré, on appelle transversal de G un sous ensemble T des sommets de G telle que toute arête de G est incidente à au moins un sommet de T (T "couvre" les arêtes). On dit qu'un transversal de G est minimum si aucun transversal de G n'a un cardinal strictement plus petit.

1. Si M est un couplage de G et T un transversal de G , montrer que $|M| \leq |T|$.
2. Le résultat précédent montre que la taille d'un couplage maximum dans un graphe quelconque est inférieure à la taille d'un transversal minimum. A-t-on égalité entre ces deux quantités en général ?
3. On suppose à présent que G est un graphe biparti dont on note $S_1 \cup S_2$ la bipartition des sommets et M un couplage maximum. On note E l'ensemble formé des sommets de S_1 non saturés par M auxquels on ajoute les sommets atteignables à partir d'un de ces sommets par un chemin M -alternant.
 - a. Montrer que pour toute arête $\{u, v\}$ de M on a soit $u \in E$ et $v \in E$, soit $u \notin E$ et $v \notin E$.
 - b. Montrer que $T = (S_1 \setminus E) \cup (S_2 \cap E)$ est de cardinal égal à $|M|$.
 - c. Montrer que T est un transversal de G .
 - d. Dédurre de ce qui précède le théorème de König : dans un graphe biparti, la taille d'un couplage maximum est égale à la taille d'un transversal minimum.
4. Déterminer un transversal minimum dans le graphe suivant :

