Corrigé TD7. Graphes avancés

Exercice 5. Algorithme de Prim ($\star\star$)

1. On trouve un arbre de poids 6. Il n'y a pas unicité.

2. Montrons que cette propriété est un invariant de boucle.
Avant la boucle, $V = \{s_0\}$ et $F = S \setminus \{s_0\}$ donc $V \cap F = \emptyset$ et $V \cup F = S$.
Supposons la propriété vérifiée au début d'un tour de boucle. Alors $V \cap F = \emptyset$ et $V \cup F = S$.
À la fin du tour, on a ajouté un nouveau sommet u à V. Comme u n'était pas dans V, il était dans F. On l'y retire. La propriété est préservée.
Ainsi, à tout moment, V et F forment une partition de S.

3. $|F|$ est un variant de boucle, puisque c'est un entier positif qui décroît strictement à chaque tour de boucle (ligne $F \leftarrow F \setminus \{v\}$). Ainsi la boucle s'exécute un nombre fini de fois. Comme toutes les instructions terminent, l'algorithme termine.

4. Montrons que cette propriété est un variant de boucle.
Avant la boucle, $V = \{s_0\}$ et $E = \emptyset$, donc la propriété est vérfiée.
Supposons la propriété vérifiée au début d'un tour de boucle. On note V et E les valeurs des ensembles au début du tour de boucle. Il existe T tel que $E \subseteq T$ et T arbre couvrant minimal de G.
Soit $\{u, v\}$ l'arête choisie lors de l'exécution de tour de boucle.
On veut montrer qu'il existe un arbre couvrant T' tel que $E \cup \{\{u, v\}\} \subseteq T'$.
Si $\{u, v\} \in T$, alors la propriété est vérifiée.
Sinon, comme T est un arbre couvrant de G, il existe un chemin de u à v. Comme $u \in V$ et $v \notin V$, ce chemin emprunte nécessairement une arête $\{x, y\}$ telle que $x \in V$ et $y \notin V$. Donc $p(x, y) \geq p(u, v)$. (Sinon, l'algorithme aurait choisi cette arête à la place de $\{u, v\}$).
L'arbre $T' = (T \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{u, v\}\}$ convient.
Ainsi, la propriété est vérifiée à la fin du tour de boucle, c'est bien un invariant.

5. À la fin de l'algorithme, les deux invariants précédents sont vérifiés est $F = \emptyset$.
On en déduit que $V = S$ (car $V \cup F = S$), et que le graphe (S, E) est inclus dans un arbre couvrant minimal de G, d'où E arbre couvrant minimal de G.

Exercice 7. Couverture par dominos ($\star$)

On considère le graphe G dont les sommets sont les cases libres et $\{u, v\}$ est une arête ssi u et v sont des cases voisines de l'échiquier. Ce graphe est biparti (bipartition en cases noires / cases blanches). On calcule un couplage maximum dans G. Si ce couplage est de taille $|S|/2$, alors il est possible de recouvrir toutes les cases inoccupées à l'aide de dominos : Les arêtes du couplage indiquent comment placer les dominos. Sinon, c'est impossible.

Exercice 8. Caractérisation des graphes bipartis ($\star\star$)

1. *Voir cours.*

2. On enracine l'arbre, et on décompose les sommets en $S_1 = \{$sommets à distance paire de la racine $\}$ et $S_2 = \{$sommets à distance impaire de la racine$\}$.

3. La partition du graphe entier induit une partition correcte sur chacune des composantes. Réciproquement, si les sommets de chacune des k composantes se partitionnent en $S_{i,1} \cup S_{i,2}$ et alors $S_1 = \bigcup_{i=1}^{k} S_{i,1}$ et $S_2 = \bigcup_{i=1}^{k} S_{2,1}$ forme une bipartition correcte du graphe. Ce dernier résultat montre que pour détecter si un graphe est biparti, il suffit de travailler composante connexe par composante connexe. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que G est connexe.

4. Si G est biparti, supposons par l'absurde qu'il contient un cycle de longueur impaire. Alors son premier sommet est dans S_1 (sans perte de généralité), le second dans S_2 ... et ainsi de suite jusqu'au premier sommet qui doit être aussi dans S_2 . Comme S_1 et S_2 sont disjoints, c'est impossible.
Réciproquement, soit $G = (S, A)$ un graphe connexe qui ne contient aucun cycle de longueur impaire. Alors comme G est connexe, il existe un arbre couvrant de G. On le note T. D'après la question 1, (S, T) est un graphe biparti. On note $S_1 \cup S_2$ la bipartition associée. Montrons qu'elle convient pour G.
On enracine l'arbre T, et on considère par l'absurde l'existence d'une arête $\{u, v\}$ telle que $u \in S_1$ et $v \in S_1$.
Alors les chemin $s \to^* u$ et $s \to^* v$ ont une longueur de même parité. En ajoutant l'arête $\{u, v\}$ à ces chemins, on fabrique un cycle de longueur impaire, ce qui est absurde.

Exercice 9. Couplage parfait ($\star\star$)
1. On raisonne par la contraposée : si n est impair, alors tout couplage laisse un sommet libre, donc il n'existe aucun couplage parfait.
Cette condition n'est pas suffisante (exhiber un contre-exemple).

2. On construit un graphe "en étoile", c'est-à-dire qu'on définit $G = (S, A)$ défini par :

- $S = \{0, \dots n - 1\}$
- $A = \{\{0, i\} \mid i \in \{1, \dots, n - 1\}\}$

Tout couplage est alors de taille 1, et n'est donc pas parfait si $n > 2$.

3. Soit $s \in S$ un sommet quelconque de G. Soit C un couplage parfait de G. Alors il existe $\{s, t\} \in C$.
Donc $C \setminus \{\{s, t\}\}$ est un couplage parfait de $G \setminus \{s, t\}$.
D'où le résultat.