

## TD1. Langages et expressions régulières

### Exercice 1. Mots réguliers

Donner tous les mots de taille 0, 1, 2, et 3 des langages décrits par les expressions régulières suivantes :

1.  $((ab)^* \mid a)^*$
2.  $(a \mid b)^* \cdot (a \mid c)^*$
3.  $a((bb)^* \mid a)b$
4.  $(ab)^* \mid (ac)^*$

### Exercice 2. Description de langages réguliers

1. Décrire informellement les mots reconnus par les expressions régulières suivantes sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ :

1.  $(a|b)^*$
2.  $a.(a|b)^*$
3.  $(a^*. (ba|\varepsilon). a^*)^*$

2. On considère des langages sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Un mot  $w = w_1 \dots w_n$  sur cet alphabet sera interprété comme l'entier en base 2  $\sum_{i=0}^{n-1} w_{n-i} 2^i$ . Pour chacun des langages suivants, donner une expression régulière le reconnaissant :

1. L'ensemble des mots représentant des entiers impairs.
2. L'ensemble des mots représentant des entiers divisible par 4.
3. L'ensemble des mots représentant des entiers congrus à 6 modulo 8.
4. L'ensemble des mots ayant un nombre pair de 1.

### Exercice 3. Propriétés sur les opérations régulières

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois langages sur un alphabet  $\Sigma$ .

1. Que valent les langages suivants ?

1.  $\emptyset^*$
2.  $\emptyset.A$
3.  $\{\varepsilon\}.A$

2. Démontrer les propriétés suivantes :

1.  $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$
2.  $A^* = (A^*)^*$
3.  $A^*.A^* = A^*$

3. Pour les couples de langages  $(L_1, L_2)$  définis ce-dessous, donner la relation la plus précise possible entre  $L_1$  et  $L_2$  ( $\subseteq$ ,  $\supseteq$ , ou  $=$ ).

1.  $L_1 = (A.B)^*$  et  $L_2 = (A^*.B^*)$
2.  $L_1 = (A.B)^*$  et  $L_2 = (A^*.B^*)^*$
3.  $L_1 = (A \cap B)^*$  et  $L_2 = (A^* \cap B^*)$
4.  $L_1 = (A \cup B)^*$  et  $L_2 = (A^* \cup B^*)$
5.  $L_1 = A.(B \cap C)$  ;  $L_2 = (A \cap B).(A \cap C)$
6.  $L_1 = (A^* \cup B^*)^*$  et  $L_2 = (A \cup B)^*$

### Exercice 4. Langages finis

Montrer que tout langage fini est régulier.

**Exercice 5. Une équivalence sur les mots**

Soit  $\Sigma$  un alphabet. On définit sur  $\Sigma^*$  la relation  $\equiv$  suivante :

$$u \equiv v \text{ ssi } \exists (x, y) \in (\Sigma^*)^2, u = x.y \text{ et } v = y.x$$

1. Montrer que  $\equiv$  est une relation d'équivalence.
2. Montrer que  $u \equiv v$  ss'il existe un mot  $w$  tel que  $u.w = w.v$
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $u \equiv v$  si et seulement si  $u^n \equiv v^n$ .