

TD8. Langages réguliers 2

Exercice 1. Algorithme de Berry-Sethi

En appliquant l'algorithme de Berry-Sethi, donner, pour chacune des expressions régulières ci-dessous, un automate reconnaissant le même langage.

1. $a(ab \mid b^*) \mid a$
2. $(\varepsilon|a)^*ab((a|b)^*)$
3. $a(b|c)(ba|ab^*)^*$

Exercice 2. Stabilité des langages réguliers

1. On appelle miroir d'un mot $u = u_1 \dots u_n$ le mot $u_n u_{n-1} \dots u_1$, et par extension miroir d'un langage l'ensemble des miroirs des mots qu'il contient.

Montrer que si un langage L est régulier, alors son miroir l'est aussi.

2. La classe des langages réguliers est stable par union. Montrer qu'elle n'est pas stable par union infinie.

Indication : On pourra montrer que le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ peut s'écrire comme une union infinie de langages réguliers.

Exercice 3. Langages réguliers ?

Pour chacun des langages ci-dessous, dire s'il est régulier ou non. Dans le cas d'un langage régulier, fournir un automate qui le reconnaît. Dans le cas contraire justifier qu'il n'est pas régulier.

- | | |
|---|--|
| 1. $L_1 = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ | 4. $L_4 = \{u \in \Sigma^* \mid u _a = u _b\}$ |
| 2. $L_2 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n < m\}$ | 5. $L_5 = \{a^n \mid n \text{ est pair}\}$ |
| 3. $L_3 = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ | 6. $L_6 = \{a^n \mid n \text{ est premier}\}$ |

Exercice 4. Limite du lemme de l'étoile

Le lemme de l'étoile donne une condition nécessaire aux langages reconnaissables. Dans cet exercice, on montre que cette condition n'est pas nécessaire, c'est-à-dire qu'il existe des langages non reconnaissables qui vérifient le lemme de l'étoile.

On utilise l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Justifier brièvement que $\{b^m c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ est reconnaissable.
 2. Démontrer que $L_0 = \{ab^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable. (On pourra utiliser le lemme de l'étoile).
 3. Justifier brièvement que si L_1 et L_2 sont des langages reconnaissables, alors $L_1 \cap L_2$ l'est aussi.
 4. En déduire que $\{a^m b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.
- On définit le langage $L = \{b^m c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} \cup \{a^m b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$.
5. À l'aide des questions précédentes, montrer que L n'est pas reconnaissable.
 6. Montrer que tout mot non vide $w \in L$ peut se décomposer en $x.y.z$ avec $|xy| = 1$, $y \neq \varepsilon$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $xy^p z \in L$.
 7. Conclure.