Corrigé TD8. Langages réguliers 2

Exercice 4. Limite du lemme de l'étoile.
1. Le langage $\{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\} = L(b^* c^*)$. C'est donc un langage régulier (donc reconnaissable d'après le théorème de Kleene).
2. Supposons par l'absurde que L_0 est reconnaissable. Soit A un automate le reconnaissant, et ayant N états. Soit $w = ab^N c^N$.
D'après le lemme de l'étoile, comme $w \in L_0$ et $|w| > N$, il existe trois mots x,y et z tels que :

1. $w = xyz$
2. $|xy| \leq N$
3. $y \neq \varepsilon$
4. $\forall i \in \mathbb{N}$, $xy^i z \in L_0$

Si $x = \varepsilon$, alors comme $|xy| \leq N$, y est de la forme ab^k, et $xy^0 z$ est de la forme $b^{N-k}c^N \notin L_0$.
Si $x \neq \varepsilon$, alors y est de la forme b^k avec $k > 0$, et $xy^0 z$ est de la forme $ab^{N-k}c^N \notin L_0$.
Dans les deux cas, le résultat est absurde, donc L_0 n'est pas reconnaissable.
3. *Fait en cours.*
4. Supposons par l'absurde que $\{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ soit reconnaissable.
Alors $\{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\} \cap \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ aussi, en tant qu'intersection de langages reconnaissables.
Or $\{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\} \cap \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\} = \{b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.
Ainsi, $\{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ n'est pas reconnaissable.
5. Supposons par l'absurde que L est reconnaissable.
La classe des langages reconnaissables étant stable par différence ensembliste, le langage $L \setminus \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est reconnaissable.
Or $L \setminus \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\} = \{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ qui n'est pas reconnaissable d'après la question 4. Ainsi, L n'est pas reconnaissable.

6. Soit $w \in L$.

Si $w \in \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$, alors il existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $w = b^m c^n$.
On pose $x = \varepsilon$, $y = b$ et $z = b^{m-1}c^n$. Alors :

- $w = xyz$
- $|xy| = 1$
- $y \neq \varepsilon$
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $xy^p z = b^{p+m-1}c^n \in L$

Si $w \notin \{b^m c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$, alors $w \in \{a^m b^n c^n \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$, et il existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $w = a^m b^n c^n$, avec $m > 0$.
On pose $x = \varepsilon$, $y = a$, et $z = a^{m-1}b^n c^n$. Alors :

- $w = xyz$
- $|xy| = 1$
- $y \neq \varepsilon$
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $xy^p z = a^{p+m-1}b^n c^n \in L$

7. Le langage L n'est donc pas régulier, mais on ne pourrait pas prouver sa non-régularité en utilisant directement le lemme de l'étoile.