Corrigé TD9. Grammaires algébriques

Exercice 4.
Soit L_1 et L_2 deux langages algébriques.
Alors il existe $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ et $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ telles que $L_1 = L(G_1)$ et $L_2 = L(G_2)$.
On suppose de plus $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (quitte à renommer les variables).

1. Soit $G_\cup = (V_\cup, \Sigma, P_\cup, S_\cup)$ défini par :

- $V_\cup = V_1 \cup V_2 \cup \{S_\cup\}$ avec $S_\cup \notin V_1 \cup V_2$
- $P_\cup = P_1 \cup P_2 \cup \{S_\cup \to S_1 \mid S_2\}$

Montrons que $L(G_\cup) = L_1 \cup L_2$.

$\supseteq$: Soit $w \in L_1 \cup L_2$. Supposons $w \in L_1$ (le cas $w \in L_2$ étant similaire).
Alors il existe une dérivation dans G_1

$$S_1 \Rightarrow^* w$$

Cette dérivation existe aussi dans $G_\cup$ car $P_1 \subset P_\cup$.
Ainsi, dans $G_\cup$

$$S_\cup \Rightarrow S_1 \Rightarrow^* w$$

D'où $w \in L(G_\cup)$.

$\subseteq$: Soit $w \in L(G_\cup)$. Alors il existe une dérivation $S_\cup \Rightarrow^* w$. La première règle appliquée dans cette dérivation est $S_\cup \to S_1$ ou $S_\cup \to S_2$.
Supposons qu'il s'agit de la règle $S_\cup \to S_1$. Alors il existe une dérivation dans $G_\cup$

$$S_1 \Rightarrow^* w$$

De plus, cette dérivation n'utilise que des règles de P_1 car $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Ainsi, c'est une dérivation aussi dans G_1, d'où $w \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$.

2. Soit $G_c = (V_c, \Sigma, P_c, S_c)$ défini par :

- $V_c = V_1 \cup V_2 \cup \{S_c\}$ avec $S_c \notin V_1 \cup V_2$
- $P_\cup = P_1 \cup P_2 \cup \{S_c \to S_1 S_2\}$

Montrons que $L(G_c) = L_1.L_2$.

$\supseteq$: Soit $w \in L_1.L_2$. Alors il existe $u \in L_1$ et $v \in L_2$ tels que $w = u.v$.
Comme $u \in L_1$, il existe une dérivation $S_1 \Rightarrow^* u$ dans G_1.
De même, il existe une dérivation $S_2 \Rightarrow^* v$ dans G_2.
Comme $P_1 \subseteq P_c$ et $P_2 \subseteq P_c$, ces deux dérivations sont valides dans G_c. Ainsi,

$$S_c \Rightarrow^1 S_1 S_2 \Rightarrow^* u S_2 \Rightarrow^* u.v$$

D'où $w \in L(G_c)$.

$\subseteq$: Soit $w \in L(G_\cup)$. Alors il existe une dérivation $S_\cup \Rightarrow^* w$. La première règle appliquée dans cette dérivation est $S_\cup \to S_1 S_2$.
Donc il existe une dérivation dans $G_\cup$

$$S_1 S_2 \Rightarrow^* w$$

Nécessairement, il existe u et v tq $S_1 \Rightarrow^* u$, $S_2 \Rightarrow v$ et $w = u.v$. Les dérivations $S_1 \Rightarrow^* u$ et $S_2 \Rightarrow^* v$ n'utilisent respectivement que des règles de P_1 et que des règles de P_2 (car $V_1 \cap V_2 = \emptyset$). Donc $u \in L(G_1) = L_1$ et $v \in L(G_2) = L_2$. On en déduit que $w \in L_1.L_2$.

Exercice 5.
1. Soit $L = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrons que $L(G) = L$.

$\supseteq$: Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $w = a^n b^m$. Montrons que $w \in L(G)$. La dérivation suivante convient :

$$S \Rightarrow^n a^n S \Rightarrow^m a^n S b^m \Rightarrow a^n b^m$$

$\subseteq$: Soit P_n la propriété suivante :
"Pour tout mot $w \in \Sigma^*$ tel que $S \Rightarrow^n w$, $w \in L$".
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$.

$n = 0$ **:** Il n'existe aucun mot sur Σ tel que $S \Rightarrow^0 w$, donc P_0 est vérifiée.
$n \rightarrow n+1$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n. Montrons P_{n+1}. Soit $w \in \Sigma^*$ tel que $S \Rightarrow^{n+1} w$.
Raisonnons par disjonction de cas selon la première règle appliquée lors de cette dérivation.
$S \rightarrow a$ ou $S \rightarrow b$: Alors $w = a$ ou $w = b$, et dans les deux cas $w \in L$.
$S \rightarrow aS$: Alors $aS \Rightarrow^n w$ donc il existe u tel que $S \Rightarrow^n u$ et $w = au$. Par HR, $u \in L$, donc $a.u \in L$.
$S \rightarrow Sb$: Alors $Sb \Rightarrow^n w$ donc il existe u tel que $S \Rightarrow^n u$ et $w = ub$. Par HR, $u \in L$, donc $u.b \in L$.
Dans tous les cas, $w \in L$, d'où le rang $n+1$, d'où la conclusion par récurrence.
Ainsi, $L(G) \subseteq L$, et finalement $L(G) = L$.

Exercice 6.
1. On exhibe deux arbres de dérivation pour le mot $w = aab$, l'un issu de la dérivation $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow^2 aab$, et l'autre issu de la dérivation $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aaSbS \Rightarrow^2 aab$.

2. Soit $L = \{v \in \Sigma^* \mid \text{pour tout } u \text{ préfixe de } v, |u|_a \geq |u|_b\}$. Montrons que $L(G) = L$.

$\subseteq$:*Il s'agit de monter par récurrence la propriété suivante :*
"Pour tout mot $w \in \Sigma^*$ tel que $S \Rightarrow^n w$, $w \in L$".
Normalement cela se fait sans difficulté particulière.

$\supseteq$: Montrons par récurrence la propriété suivante :
"Pour tout mot $w \in \Sigma^n$ tel que $w \in L$, $w \in L(G)$".
$n = 0$: Le mot vide ε est dans L et $S \Rightarrow \varepsilon$ donc la propriété est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour tout $k \leq n$. Montrons la propriété au rang $n+1$.
Soit $w = w_1 \dots w_{n+1}$ tel que pour tout préfixe u de w, $|u|_a \geq |u|_b$.
Alors $w_1 = a$ (car c'est un préfixe de w).
Si $w = a^{n+1}$, alors $S \Rightarrow^{n+1} a^{n+1} S \Rightarrow a^{n+1}$ donc $w \in L(G)$.
Sinon, soit i l'indice max tel que $w_i = b$.
Montrons que $w' = w_2 ... w_{i-1} \in L$. Soit $w_2 ... w_k$ un préfixe de w' (donc $k \leq i - 1$).

$$|w_2 ... w_k|_a = |w_1 ... w_k|_a - 1 \geq |w_1 ... w_k|_b - 1 = |w_2 ... w_k|_b - 1$$

donc $|w_2 ... w_k|_a \geq |w_2 ... w_k|_b - 1$. Supposons par l'absurde qu'on ait l'égalité.
Alors $|w_1 ... w_i|_b = |w_2 ... w_k|_b + |w_{k+1} ... w_i|_b = |w_2 ... w_k|_a + 1 + |w_{k+1} ... w_i|_a = |w_1 ... w_i|_a$, ce qui est

absurde. Ainsi, $|w_2...w_k|_a \geq |w_2...w_k|_b$, donc $w' \in L$. Comme $|w'| < n$, par HR, $S \Rightarrow^* w'$. Finalement,

$$S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* aw'bS \Rightarrow^{n-i} aw'ba^{n+1-i} = w$$

Donc $w \in L(G)$.