

TD12. Preuves en logique propositionnelle

Exercice 1. Divers arbres de preuve

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants :

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $p \vdash p \rightarrow p$ | 4. $p \vee (p \wedge q) \vdash p$ |
| 2. $p \wedge q \vdash q \wedge p$ | 5. $p \wedge q, r \wedge s \vdash p \wedge s$ |
| 3. $p, \neg p \vdash \perp$ | 6. $p \vdash \neg\neg p$ |

Exercice 2. Lois de Morgan

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$ | 3. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ |
| 2. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$ | 4. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$ |

Exercice 3. Distributivité

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants :

- | | |
|--|--|
| 1. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | 3. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| 2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$ | 4. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$ |

Exercice 4. Implications

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants :

- | | |
|--|---|
| 1. $q \vdash p \rightarrow q$ | 3. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ |
| 2. $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$ | 4. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ |

Exercice 5. Utilisation de l'absurdité intuitionniste

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants :

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. $\neg\neg p \vdash p$ | 3. $p \vee q, \neg q \vdash p$ |
| 2. $\neg p \vdash p \rightarrow q$ | 4. $\neg(p \rightarrow q) \vdash q \rightarrow p$ |

Exercice 6. Dérivations et absurdité intuitionniste

On dit qu'on dérive une règle R lorsqu'on donne une preuve qui aboutit au séquent conclusion de la règle R en construisant un arbre dont les feuilles sont des séquents prémisses de la règle R ou des axiomes.

1. Dériver $(\perp_e)$ en utilisant la règle $(\rightarrow_e)$.
2. Dériver $(\perp_e)$ en utilisant $(\neg\neg_e)$.
3. Dériver $(\perp_e)$ en utilisant (abs).