

Ex 3 :

1. Soit $(s_i)_{i \in I}$ une partie du jeu des allumettes.

Entre deux états s_i et s_{i+1} , le nombre d'allumettes décroît strictement. Comme ce nombre reste positif, $(s_i)_{i \in I}$ est nécessairement une suite finie.

Son dernier état s_p est sans successeur, donc $s_p \in \{(0,1), (0,2)\} \subset O_1 \cup O_2$.

La partie n'est pas nulle.

2. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$AH_p^1 = \{(i,1) \mid i \not\equiv 1[k+1], i \leq p\} \cup \{(i,2) \mid i \equiv 1[k+1], i \leq p\}$$

$AH_0^1 = O_1 = \{(0,1)\}$, donc la propriété est vérifiée.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tq

$$AH_p^1 = \{(i,1) \mid i \not\equiv 1[k+1], i \leq kp\} \cup \{(i,2) \mid i \equiv 1[k+1], i \leq kp\}.$$

Par définition,

$$AH_{p+1}^1 = AH_p^1 \cup \{(i,1) \mid \exists (j,2) \in AH_p^1 \text{ et } (i,1) \rightarrow (j,2) \text{ coup possible}\} \cup \{(i,2) \mid \forall (j,1) \text{ tq } (i,2) \rightarrow (j,1), (j,1) \in AH_p^1\}.$$

Soit $(j,2) \in AH_p^1$. Alors $j \equiv 1[k+1]$.

Soit $(i,1)$ un état tq $(i,1) \rightarrow (j,2)$.

Alors $\exists l \in \{1, \dots, k\}$ tq $i - l = j$.

Ainsi, $i = j + l \not\equiv 1[k+1]$

De plus, $i \leq kp + l \leq k(p+1)$

Soit $(i, 2)$ tq $\forall (j, 1)$ tq $(i, 2) \rightarrow (j, 1)$,
 $(j, 1) \in \text{Att}_p^1$.

Alors $\forall l \in \{1, \dots, k\}$, $i - l \not\equiv 1 [k+1]$,
donc $i \equiv 1 [k+1]$.

Ainsi,

$$\text{Att}_{p+1}^1 = \text{Att}_p^1 \cup \{(i, 1) \mid i \not\equiv 1 [k+1], i \leq k(p+1)\} \\ \cup \{(i, 2) \mid i \equiv 1 [k+1], i \leq k(p+1)\}$$

D'où le rang $p+1$.

Finalement, $\text{Att}^1 = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \text{Att}_p^1$, d'où
le résultat.

On raisonne de même pour Att^2 .

2. L'état initial du jeu $(n, 1)$ est un
état gagnant pour le joueur 1
si $n \not\equiv 1 [k+1]$, et est gagnant pour
le joueur 2 sinon.