

TD13. Preuves en logique du premier ordre

Exercice 1. Variables libres et liées

À partir des variables $\{w, x, y, z\}$, on a défini les formules suivantes :

$$\varphi_1 = p(f(x, y)) \vee \forall z, r(z, z)$$

$$\varphi_2 = \forall x, \exists y, (r(x, y) \rightarrow \forall z, q(x, y, z))$$

$$\varphi_3 = \forall y, \left(p(f(g(x), y)) \wedge \forall x, (r(g(z), x) \rightarrow \exists z, p(f(z, w))) \right)$$

1. Dessiner les arbres de syntaxe de ces formules.
2. Pour chacune de ces formules :
 1. déterminer l'ensemble des symboles de fonctions et donner leurs arités
 2. déterminer l'ensemble des symboles de prédicat et donner leurs arités.
3. Pour chacune de ces formules :
 1. déterminer l'ensemble des variables libres
 2. déterminer l'ensemble des variables liées
 3. indiquer pour chaque occurrence de variable liée le quantificateur dont elle dépend à l'aide d'une flèche de couleur sur l'arbre de syntaxe.
4. On dit qu'une formule est close si elle ne comporte aucune variable libre. Parmi ces formules, lesquelles sont closes ?

Exercice 2. Substitution

Soit x, y, z et w des symboles de variables, f, g et h des symboles de fonctions d'arités respectives 2, 3 et 1, et enfin P et Q des symboles de prédicats d'arité 2.

Calculer $\varphi[x \rightarrow f(y, z)]$, en appliquant un α -renommage si nécessaire, pour :

1. $\varphi = \forall x, \exists z, P(f(y, z), x)$
2. $\varphi = \exists z, P(f(y, z), x)$
3. $\varphi = \forall y, \exists z, P(g(y, z, x), x)$
4. $\varphi = (\forall w, P(h(w), x)) \rightarrow (\forall x, \forall z, Q(x, f(z, z)))$

Exercice 3. Quelques arbres de preuve

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants. P et Q sont des symboles de prédicat.

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x, Q(x) \vdash \exists x, Q(x)$ | 3. $\exists x, \neg Q(x) \vdash \neg(\forall x, Q(x))$ |
| 2. $\exists y, \forall x, P(y, x) \vdash \forall x, \exists z, P(z, x)$ | 4. $\neg(\exists x, Q(x)) \vdash \forall x, \neg Q(x)$ |

Exercice 4. Distributivité des quantificateurs

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction naturelle pour chacun des séquents suivants.

1. $\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$
2. $(\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)) \vdash \forall x, (P(x) \wedge Q(x))$
3. $\exists x, (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$
4. $\exists x, P(x) ; \forall x, (P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x, Q(x)$

Exercice 5. Logique classique du premier ordre

Donner une preuve utilisant les règles de la déduction classique pour chacun des séquents suivants :

1. $\neg(\exists x, \neg P(x)) \vdash \forall x, P(x)$
2. $\neg(\forall x, P(x)) \vdash \exists x, (\neg P(x))$
3. $(\forall x, \neg P(x)) \vdash \neg(\exists x, P(x))$