

Electromagnétisme - TD3 - Equations de Maxwell

EXERCICE 1

1) Equation de Maxwell - Gauss dans le vide ($\rho=0$) : $\text{div } \vec{E} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= f(z) e^{-\alpha t} \vec{u}_x \\ &= E_x(z, t) \vec{u}_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$= 0$ car E_x ne dépend pas de x .

Equation de Maxwell flux : $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= g(z) e^{-\alpha t} \vec{u}_y \\ &= B_y(z, t) \vec{u}_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y}$$

$= 0$ car B_y ne dépend pas de y .

2) Equation de Maxwell - Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f(z) e^{-\alpha t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f'(z) e^{-\alpha t} \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\Leftrightarrow f'(z) e^{-\alpha t} = -\alpha g(z) e^{-\alpha t} \\ &\Leftrightarrow \boxed{f'(z) = -\alpha g(z)} \quad (1) \end{aligned}$$

3) Equation de Maxwell Ampère dans le vide ($\vec{j}=\vec{0}$) : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ g(z) e^{-\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix} = -g'(z) e^{-\alpha t} \vec{u}_x$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} : \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow -g'(z) e^{-\alpha t} = -\alpha \frac{1}{c^2} f(z) e^{-\alpha t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g'(z) = \frac{\alpha}{c^2} f(z)} \quad (2)$$

4) On dérive l'équation (1) : $f''(z) = \alpha g'(z)$

On remplace $g'(z)$ avec (2) : $f''(z) = \frac{\alpha^2}{c^2} f(z)$

Soit $\boxed{f''(z) - \frac{\alpha^2}{c^2} f(z) = 0}$

Rq: dans le vide, $\vec{E}$ est également solution de l'équation de propagation $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ ce qui donne également:

$$f''(z) - \frac{1}{c^2} (-\alpha)^2 f(z) = 0$$

On cherche $f(z) = E_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{c} z\right) + E_2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{c} z\right)$

$f(z)$ est paire donc $E_2 = 0$, $\vec{E}(0,0) = E_0 \vec{u}_x \Rightarrow E_1 = E_0$

soit $\boxed{\vec{E} = E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{c} z\right) e^{-\alpha t} \vec{u}_x}$

On a d'autre part $g(z) = \frac{1}{\alpha} f'(z) \Rightarrow g(z) = \frac{E_0}{c} \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{c} z\right)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{c} z\right) e^{-\alpha t} \vec{u}_y}$

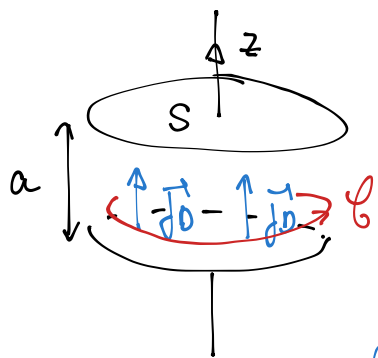
5) Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{c} z\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{c} z\right) e^{-2\alpha t} \vec{u}_z}$

EXERCICE 2

1) Entre les armatures du condensateur $\vec{j} = \vec{0}$, le champ magnétique vérifie donc : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ et $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell flux) (Maxwell Ampère)

2) On pose $\vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ courant de déplacement.



L'existence d'un champ $\vec{E}$ dépendant du temps est à l'origine du champ magnétique $\vec{B}$.

Rq: * le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de $\vec{j}_0 \Rightarrow \vec{B} = B_\theta(M) \vec{u}_\theta$

* la distribution de $\vec{j}_0$ est invariante par rotation d'axe

$$(Oz) \Rightarrow B_\theta(M) = B(r, z, t)$$

$\rightarrow$ On cherche $\vec{B}(M, t) = B_\theta(r, z, t) \vec{u}_\theta$

3) C = cercle d'axe (Oz) , de rayon r

Théorème d'Ampère généralisé: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$

Pour $r < a$: $2\pi r B_\theta = \mu_0 \pi r^2 j_0$ avec $j_0 = \epsilon_0 E'(t)$

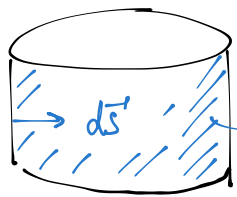
$$\Rightarrow B_\theta(r, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{r E'(t)}{2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{r E'}{2}$$

Pour $r > a$: $2\pi r B_\theta = \mu_0 \pi a^2 j_0$ soit

$$B_\theta(r, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{a^2 E'(t)}{2r}$$

4) On calcule le vecteur de Poynting en $r = a$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\Pi} = -\frac{\epsilon_0 a E E'}{2} \vec{u}_r$$



surface latérale $d\vec{S} = -ds \vec{u}_r$

la puissance entrant par la surface latérale:

$$P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \Leftrightarrow P = 2\pi a L \frac{\epsilon_0 a}{2} E E'$$

$$\epsilon_0 E E' = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \sigma' = \frac{1}{\epsilon_0 (\pi a^2)} \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) \text{ avec } q = \sigma \pi a^2$$

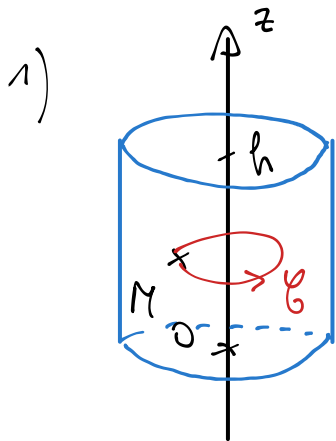
On a ainsi :
$$P = \frac{e}{\epsilon_0 \pi a^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right)$$

On pose $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e}$ capacité du condensateur

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}}_{\text{Eelec}} \right) \end{array} \right\}$$

Rq : $\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ énergie stockée dans le condensateur.

EXERCICE 3



Equation de Maxwell - Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow$ un champ magnétique variable est source d'un champ électrique.

2) C : cercle d'axe (Oz) de rayon r :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\text{rot}} \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes})$$

$$\Rightarrow 2\pi r E_\theta = \iint_S \left(- \frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

Soit $2\pi r E_\theta(r, t) = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{E_\theta(r, t) = \frac{r \omega}{2} B_0 \sin(\omega t)}$$

On en déduit $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\gamma r \omega}{2} B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_\theta}$$

3) La puissance volumique $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow p = \frac{\gamma \omega^2}{4} B_0^2 \sin^2(\omega t) r^2$$

$\nearrow \Delta$

La puissance moyenne: $\langle P \rangle = \frac{\gamma \omega^2}{8} B_0^2 r^2$

4) On intègre $\langle P \rangle$ sur le cylindre :

$$P_{\text{Joule}} = \iiint_{\text{cylindre}} \frac{\gamma \omega^2}{8} B_0^2 r^2 d\tau \quad \text{avec } d\tau = r dr d\theta dz$$

$$\rightarrow P_{\text{Joule}} = \frac{\gamma \omega^2}{8} B_0^2 2\pi h \frac{a^4}{4} = \boxed{\frac{\pi \gamma \omega^2 B_0^2}{16} h a^4}$$

Exercice 4

1) Pour une OPPM se propageant dans le vide, on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}, \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}, \quad n = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

1) On a ici :

$$\|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = \frac{\Phi}{\pi a^2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \frac{\Phi}{\pi a^2}}$$

$$\text{A.N : } \underline{E_0 = 9,2 \cdot 10^2 \text{ V/m}}, \quad B_0 = \frac{E_0}{c} \Rightarrow \underline{B_0 = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ T}}$$

2) On a également $\langle \Pi \rangle = n h \nu c = n \frac{hc}{\lambda} c$

$$\Rightarrow n = \frac{\Phi \lambda}{\pi a^2 hc^2} \quad \text{A.N : } n = 1,2 \cdot 10^{13} \text{ photons /m}^3$$

Exercice 5

1) On a, comme dans l'exercice 4, $\langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

$$\Rightarrow E_0 = \left(2\mu_0 c \langle \Pi \rangle \right)^{1/2} \quad \text{A.N : } E_0 = 27,5 \text{ V/m.}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{k} &= \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z) \quad \text{vecteur d'onde.} \\ &= k \vec{u} \end{aligned}$$

Le champ magnétique $\vec{B} = \frac{\vec{u}_n \wedge \vec{E}}{c}$ (OPPM dans le vide)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha z) (\cos \alpha \vec{u}_z - \sin \alpha \vec{u}_x)$$

Le vecteur normal au cadre $\vec{N} = \vec{u}_x$, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \cos \alpha \times 0 - k \sin \alpha z) \sin \alpha \, dy \, dz \\ &= \frac{E_0}{c} a \sin \alpha \left[\frac{1}{k \sin \alpha} \sin(\omega t - k \sin \alpha z) \right]_0^a \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{E_0 a}{k c} \left(\sin(\omega t - k a \sin \alpha) - \sin(\omega t) \right)} \quad \text{et } \omega = k c$$

La fem induite : $e = - \frac{d\Phi}{dt}$

$$\rightarrow e = \frac{E_0 a}{\omega} \omega \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega t - k a \sin \alpha) \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$e = - \underbrace{2 E_0 a \sin \left(\frac{k a \sin \alpha}{2} \right)}_{\text{amplitude}} \cos \left(\omega t - \frac{k a \sin \alpha}{2} \right)$$

La valeur efficace de e est maximale pour $\sin \left(\frac{k a \sin \alpha}{2} \right) = 1$

$$\text{et elle vaut : } \frac{2 E_0 a}{\sqrt{2}} = E_0 a \sqrt{2}$$

$$\text{On a ainsi : } a = \frac{3,8}{27,5 \sqrt{2}} = 9,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

3) Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$E_{\text{eff}} = \frac{2 E_0 a}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{2 \sqrt{2} E_0}{k} \underbrace{\frac{a k}{2} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}_{\text{fonction de } \frac{ka}{2}}$$

$$a < \lambda_0 \Rightarrow \frac{ka}{2} < \frac{k \lambda_0}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{ka}{2} < \pi$$

On trace $x \sin x$ pour x variant de 0 à π . Le maximum est obtenu pour $x = 1,82$

$$x = \frac{ka}{2} = \frac{\omega a}{2c} = \frac{f \pi a}{c} \Rightarrow a = \frac{c x}{\pi f}$$

A.N : $a = \frac{1,82}{\pi} \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} \quad \left(\text{avec } \frac{c}{f} = \lambda_0 = 3 \text{ m ici} \right)$

Soit $a = 1,74 \text{ m}$ (a est de l'ordre de $\frac{\lambda_0}{2}$)