Électromagnétisme - TD4 - Plasma (1)

Exercice 1 - Paquet d'ondes

On considère un paquet d'ondes de pulsation ω_o, de largeur $\delta\omega$ se propageant suivant $+\vec{u}_z$ et polarisé rectilignement suivant $+\vec{u}_x$. On étudie dans cet exercice deux représentations de ce paquet d'ondes, la relation de dispersion dans le milieu est supposée connue.

1. Dans un premier modèle peu réaliste, on assimile le paquet d'ondes à la superposition de deux ondes, de même amplitude et même phase à l'origine, de pulsations :

$$\omega_1 = \omega_o - \frac{\delta\omega}{2} \ ; \ \omega_2 = \omega_o + \frac{\delta\omega}{2}$$

   (a) On note $k_o = k(\omega_o)$, écrire les vecteurs d'ondes k_1 et k_2 associés à ω_1 et ω_2 en fonction de k_o, $\delta\omega$ et $\frac{dk}{d\omega}(\omega_o) = \frac{1}{v_g}$.

   (b) Écrire le champ électrique $\vec{E}(z,t)$ en notation réelle.

   (c) Montrer que :

$$\vec{E}(z,t) = 2E_o \cos(\omega_o t - k_o z) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}(t - z/v_g)\right) \vec{u}_x$$

   (d) Représenter le paquet d'ondes à deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. Commenter.

2. Dans un second modèle, on considère un paquet d'ondes :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \frac{E_o}{\delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(i(\omega t - k(\omega)z)) d\omega \ \vec{u}_x$$

   (a) Représenter le spectre du signal considéré.

   (b) Montrer que :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \frac{E_o}{\delta\omega} \exp(i(\omega_o t - k_o z)) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(i(\omega - \omega_o)(t - z/v_g)) d\omega \ \vec{u}_x$$

   (c) Calculer l'intégrale puis représenter $E(0,t)$. Commenter.

Exercice 2 - Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre

Un plasma est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}_o$; une OPPM polarisée rectilignement se propage dans ce plasma dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}_o$.

1. La relation de dispersion du plasma est-elle modifiée lorsque les directions du champ électrique de l'onde $\vec{E}$ et de $\vec{B}_o$ sont parallèles ou perpendiculaires ?

2. Dans le cas où elle est modifiée, on montre que ma relation de dispersion s'écrit :

$$k^2c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 - \omega_c^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2}$$

   où $\omega_c = eB_o/m$ est la pulsation cyclotron et ω_p est la pulsation plasma.
   On donne ci-après l'allure de $k^2c^2 = f(\omega^2)$. En déduire pour quelles pulsations les ondes peuvent réellement se propager dans le milieu.

3. On envoie verticalement selon (Ox) une onde sur l'ionosphère où la densité électronique n_o est supposée uniforme. Lorsque l'émission de l'onde est telle que la direction du champ électrique est parallèle à celle du champ magnétique terrestre $\vec{B}_o$, il y a écho (donc réflexion) pour une longueur d'onde émise supérieure à $\lambda_o = 42,70$m. Lorsque les directions du champ électrique de l'onde et de $\vec{B}_o$ sont perpendiculaires, l'écho se produit pour une longueur d'onde supérieure à $\lambda'_o = 38,90$m.

(a) Déduire de ces deux mesures le nombre n_o d'électrons par mètre cube de l'ionosphère.

(b) Vérifier que la valeur de λ'_o est en accord avec une valeur du champ magnétique $B_o = 4,683.10^{-5}$ T.

(c) Le champ magnétique terrestre décroît en fonction de l'altitude suivant la loi :

$$B_o(x) = B_o(0)\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

où $B_o(0) = 4,700.10^{-5}$T est sa valeur au sol et $R = 6370$km le rayon terrestre. Calculer l'altitude de la couche réfléchissante. Quel peut être l'intérêt de cette propriété ?

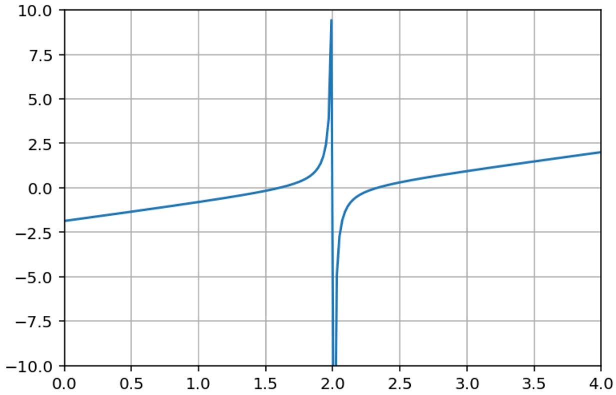

FIGURE 1 – k^2c^2 en fonction de ω^2 (unités arbitraires)

Exercice 3 - Densité volumique de charge

On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense. On utilisera la notation :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_o \exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

On suppose par ailleurs l'existence d'une densité volumique de charge non nulle :

$$\underline{\rho} = \rho_o \exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

1. Établir l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ dans le milieu.
2. À l'aide de l'équation de conservation de la charge et des équations de Maxwell, établir une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ε_o.
3. Montrer que $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$. En déduire la position relative des vecteurs $\vec{k}$ et $\underline{\vec{E}}$. Montrer que la pulsation ω ne peut avoir qu'une seule valeur.