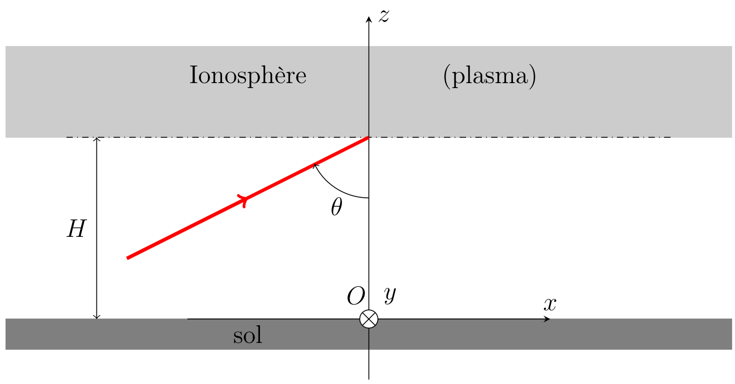
Électromagnétisme - TD4 - Plasma - Conducteur (2)

Exercice 1 - La télégraphie sans fil [1]

Le physicien italien Marconi est considéré comme un des inventeurs de la transmission à grande distance de signaux électromagnétiques (la T.S.F., télégraphie sans fil, ou radio). Il a reçu à ce titre le prix Nobel de physique en 1909. On lui doit la réalisation de la première transmission radio transatlantique (1901) entre le nord–est du Canada et le sud–ouest de l'Angleterre, séparés par une distance de 3500 km à vol d'oiseau.

1. Lors de la première série d'expériences, le récepteur se situait au niveau du sol et l'émetteur était porté par des cerf-volants dont l'altitude maximale était $h = 180$m. Estimer la distance maximale entre l'émetteur et le récepteur pour une transmission directe (sans réflexion) en fonction du rayon terrestre R_T.
2. La transmission sur une grande distance est en fait possible grâce à la réflexion sur l'ionosphère qui constitue un plasma. On considère qu'une OPPM de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$ est émise en direction de ce plasma dans une direction faisant un angle θ avec la verticale.



   (a) Donner l'expression complexe du champ électrique de l'onde incidente : on notera E_o son amplitude et on prendra l'origine des phases en O.

   (b) On recherche le champ électrique dans le plasma sous la forme :

$$\underline{\vec{E}'} = E'_o \, \vec{u}_y \, e^{i(\omega' t - \vec{k}'.\vec{r})}$$

   ω' et $\vec{k}'$ étant liés par la relation de dispersion :

$$\omega'^2 = k'^2 c^2 + \omega_p^2$$

   On admet qu'à l'interface $z = H$, le champ électrique est continu. En déduire les expressions de ω', $k'_x = \vec{k}'.\vec{u}_x$, $k'_y = \vec{k}'.\vec{u}_y$ en fonction de ω, c et θ.

   (c) En déduire k'^2_z et en déduire que l'onde transmise ne peut pas se propager dans le plasma si $\omega < \omega_\ell$, ω_ℓ pulsation limite que l'on exprimera en fonction de ω_p et θ.

   (d) Application numérique : on donne $f_p \sim 1$MHz ; $H \sim 175$km. Calculer $\cos(\theta)$ puis la fréquence limite dans le cas d'une transmission sur une distance totale $d \sim 3500$ km en négligeant la courbure terrestre.

1. D'après Mines Ponts PSI 2021.

Exercice 2 - Réflexion sur un conducteur

On donne le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide. En $z = 0$, elle subit une réflexion sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z > 0$.

$$\vec{E}_i = E_o \cos(\omega t - kz)\ \vec{u}_x + E_o \sin(\omega t - kz)\ \vec{u}_y$$

1. Donner l'expression de l'onde réfléchie.
2. Déterminer les polarisations respectives des ondes incidentes et réfléchies.

Exercice 3 - Câble coaxial [2]

Un câble coaxial est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon a, appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur b. Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement Λ et Γ les inductance et capacité par unité de longueur. On a ainsi :

$$dL = \Lambda\ dx\ ;\ dC = \Gamma\ dx$$

Dans ce modèle, on néglige les pertes résistives.

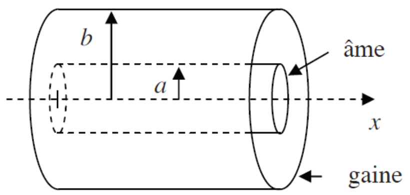


Figure 1 – Structure d'un câble coaxial

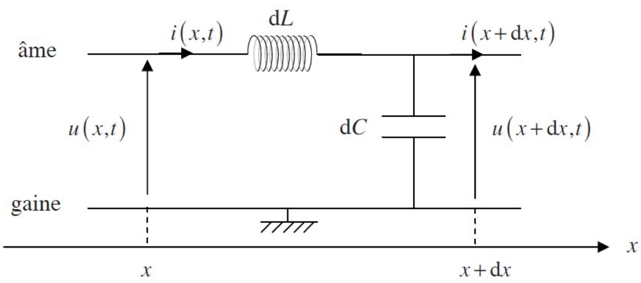


Figure 2 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx

1. Établir deux équations différentielles couplant le courant $i(x,t)$ et la tension $u(x,t)$.
2. Montrer que le courant $i(x,t)$ et la tension $u(x,t)$ obéissent à deux équations de propagation. Donner l'expression de la vitesse de propagation dans le câble en fonction de Λ et Γ.
3. La ligne est alimentée en $x = 0$ par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω. Elle est fermée en $x = \ell$ sur un dipôle d'impédance $\underline{Z}_D$:

$$\underline{u}(\ell,t) = \underline{Z}_D\ \underline{i}(\ell,t)$$

On note :

$$\underline{i}(x,t) = i_o\ e^{j(\omega t - kx)} + i_1\ e^{j(\omega t + kx)}$$

(a) Quelle relation doivent vérifier ω et k ?

(b) Comment s'écrit le courant $\underline{u}(x,t)$? On introduira l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

$Z_c = 50\Omega$ pour les câbles utilisés en TP.

(c) Déterminer l'expression de i_1 en fonction de Z_c, $\underline{Z}_D$, ℓ et i_o.

(d) À quelle condition sur $\underline{Z}_D$ n'y a-t-il pas d'onde réfléchie dans le câble ? Commenter.

2. D'après CCINP PC 2018

Exercice 4 - Guide d'onde rectangulaire

On considère un champ de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(z)e^{i(\omega t - kx)}\vec{u}_y$$

se propageant dans le vide entre quatre plan conducteurs parfaits constituants un guide d'onde (voir figure ci-dessous). La dimension du guide suivant (Ox) est considérée comme infinie et on donne :

$$a = 2,29 \text{ cm} \ ; \ b = 1,02 \text{ cm}$$

On rappelle les conditions aux limites vérifiées par le champ $\vec{E}$ à l'interface entre deux milieux :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}_{12}$$

1. Déterminer $f(0)$ et $f(a)$ à l'aide des conditions aux limites.
2. Montrer que $f(z)$ est solution de l'équation différentielle :

$$f''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(z) = 0$$

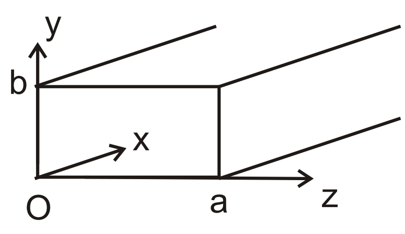
   À l'aide des conditions aux limites, montrer que :

$$f(z) = E_n \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)$$

3. Déterminer la relation de dispersion dans le guide. En déduire l'expression de la vitesse de phase v_φ. Le milieu est-il dispersif ? Quelle est la valeur numérique de la plus petite fréquence pouvant se propager dans le guide ? Quelle est l'expression de la vitesse de groupe.
4. On choisit d'étudier le mode $n = 1$.
   (a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$. On parle de mode transverse électrique et non transverse magnétique. Commenter.
   (b) Les courants surfaciques sont déterminés par les conditions aux limites sur $\vec{B}$:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

   Y a-t-il des courants surfaciques $\vec{j}_s$ dans les conducteurs constituant le guide ?
   (c) Établir l'expression du vecteur de Poynting moyen dans le guide.



Exercice 5 - Réflexion sur un conducteur[3]

On donne :
— $\gamma_o = 3,8.10^7 \text{S.m}^{-1}$ (aluminium) ;
— $f = 14\text{MHz}$ (système RFID)
— $\varepsilon_o = 8,85.10^{-12}\text{F.m}^{-1}$

3. D'après Centrale MPI 2023

On considère désormais une onde électromagnétique plane progressive et harmonique (OPPH) $\vec{E}_c(z,t)$ de pulsation ω se propageant dans le conducteur précédemment considéré qui occupe le demi-espace $z \geqslant 0$. En notation complexe, cette onde s'écrit

$$\underline{\vec{E}}_c(z,t) = E_{0,c}\exp\big(\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}_t z)\big)\vec{e}_x$$

L'amplitude $E_{0,c}$ est supposée constante et le vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}_t = \underline{k}_t\vec{e}_z$ est complexe de telle sorte que $\underline{k}_t = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec α et β réels.

Q 9. On suppose que la loi d'Ohm s'écrit sous la forme $\vec{\jmath} = \gamma_0\vec{E}$, montrer que dans le conducteur la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ peut être considérée comme nulle au bout d'un temps τ' que l'on exprimera en fonction des données du problème. On pourra notamment utiliser l'équation de conservation de la charge, que l'on ne cherchera pas à démontrer, et établir l'équation vérifiée par $\rho(M,t)$.

Q 10. Justifier que l'on peut supposer que le milieu est électriquement neutre. Écrire dans ces conditions l'équation de Maxwell-Gauss dans un conducteur ohmique.

Q 11. En supposant que les valeurs des fréquences utilisées permettent d'utiliser les versions simplifiées des équations de Maxwell identifiées dans les questions 8 et 10, établir l'équation suivante pour le champ électrique $\vec{E}_c$ au sein du conducteur

$$\Delta\vec{E}_c(z,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial\vec{E}_c(z,t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Exprimer D en fonction des grandeurs du problème et préciser son unité.

Q 12. Montrer alors que la relation de dispersion, pour le milieu considéré, s'écrit

$$\underline{k}_t^2 = -\mathrm{i}\omega\mu_0\gamma_0.$$

Q 13. Déterminer l'expression des grandeurs α et β en choisissant $\alpha > 0$, c'est-à-dire en considérant une propagation vers les z croissants.

Q 14. Montrer alors que le champ électrique, en notation réelle, dans le conducteur peut se mettre sous la forme

$$\vec{E}_c(z,t) = E_{0,c}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{e}_x.$$

Exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

Q 15. Proposer une représentation soignée de la composante suivant x, $E_{c,x}$, de $\vec{E}_c(z,t)$ à t fixé, en fonction de z pour le demi-espace $z \geqslant 0$. On fera apparaitre la grandeur δ sur le schéma.

Q 16. Comment appelle-t-on δ ? Quelle est sa signification physique ? Donner la valeur de δ pour les ondes électromagnétiques de communication NFC-RFID.

I.C – Réflexion sur un conducteur ohmique

L'onde $\vec{E}_c(z,t)$ présente dans le conducteur précédent est due à la présence d'une OPPH incidente se propageant dans le vide, supposée occuper le demi-espace $z < 0$, vers les z croissants de même pulsation ω de la forme, en notation complexe, $\underline{\vec{E}}_i(z,t) = \underline{E}_{0,i}\exp\big(\mathrm{i}(\omega t - kz)\big)\vec{e}_x$, avec $k = \dfrac{\omega}{c} > 0$. L'onde incidente atteint le conducteur en $z = 0$.

Q 17. Proposer une expression du champ électrique réfléchi d'amplitude complexe $\underline{E}_{0,r}$.

Q 18. En exploitant les relations de continuité du champ électrique à la surface d'un dioptre, déterminer une relation reliant les coefficients complexes de transmission $\underline{t} = \dfrac{E_{0,c}}{\underline{E}_{0,i}}$ et de réflexion $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{0,r}}{\underline{E}_{0,i}}$ en amplitude de l'onde électromagnétique.

Q 19. Déterminer l'expression des champs magnétiques incident $\underline{\vec{B}}_i(z,t)$, réfléchi $\underline{\vec{B}}_r(z,t)$ et transmis $\underline{\vec{B}}_c(z,t)$.

Q 20. En exploitant les relations de continuité du champ magnétique à la surface d'un dioptre et en considérant les courants surfaciques nuls, déterminer une nouvelle relation entre $\underline{t}$ et $\underline{r}$.

Q 21. En combinant les deux expressions précédentes de $\underline{t}$ et $\underline{r}$, montrer que

$$\underline{r} = \frac{k\delta - 1 + \mathrm{i}}{k\delta + 1 - \mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - \mathrm{i}}.$$