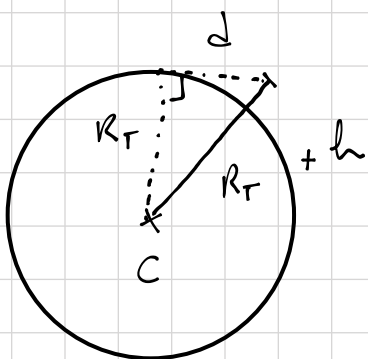


Exercice 1

1)



Théorème de Pythagore :

$$(R_T + h)^2 = R_T^2 + d^2$$

$$h \ll R_T \Rightarrow (R_T + h)^2 \simeq R_T^2 \left(1 + 2 \frac{h}{R_T}\right)$$

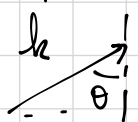
$$\Rightarrow R_T^2 + 2 h R_T = R_T^2 + d^2$$

$$\text{soit } d = \sqrt{2 h R_T}$$

$$\text{A.N : } d = (2 \times 180 \times 6,4 \cdot 10^6)^{1/2} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ m soit } 48 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ c'est très faible par rapport aux 3500 km : la transmission ne sera pas directe.

2) a)

Le vecteur d'onde : $\vec{k} = k \sin \theta \vec{u}_x + k \cos \theta \vec{u}_z$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k \sin \theta x - k \cos \theta z)} \vec{u}_y$$

$$b) \vec{E}' = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y - k'_z z)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}(z=H) + \vec{E}_{\text{refléchi}}(z=H) = \vec{E}'$$

$$E_0 e^{i(\omega t - k \sin \theta x - k \cos \theta H)} + E_{\text{refléchi},y} = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y - k'_z H)}$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout t , pour tout x et tout y ,

on a donc :

$$\omega' = \omega \quad k'_x = k \sin \theta \quad k'_y = 0$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ ($\vec{E}$ se propage dans un milieu assimilé au vide)

c) La relation de dispersion dans le plasma s'écrit :

$$\omega^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta + k_z'^2 \right) c^2 + \omega_p^2$$

$$\Rightarrow k_z'^2 = \frac{\omega^2 (1 - \sin^2 \theta) - \omega_p^2}{c^2}$$

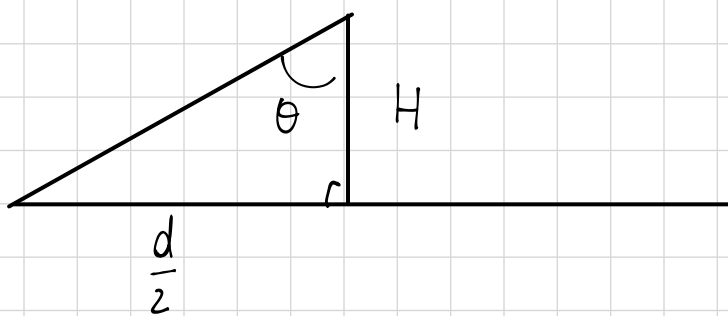
$$= \frac{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2}{c^2}$$

On doit avoir $k_z'^2 > 0$ pour que l'onde puisse se propager dans le plasma soit

$$\omega^2 \cos^2 \theta > \omega_p^2$$

$$\Rightarrow \omega > \omega_\ell \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_\ell = \frac{\omega_p}{\cos \theta}} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ n'aurait pas de sens ici} \right)$$

d)



$$\cos \theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

A.N : $\cos \theta = 0,1$

$$f_\ell = \frac{f_p}{\cos \theta} \Rightarrow f_\ell = 10 \text{ MHz}$$

$\Rightarrow$ Marconi a donc utilisé une fréquence inférieure à 10 MHz

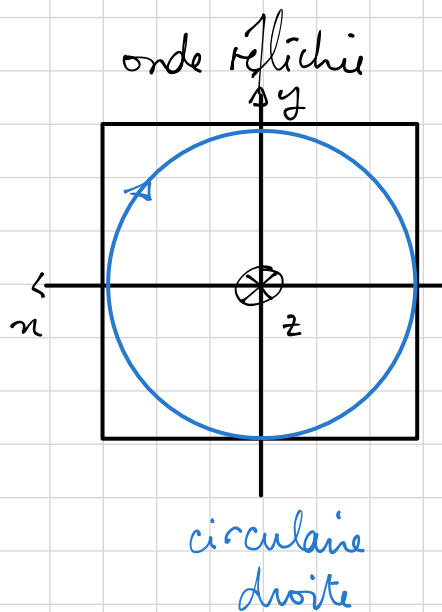
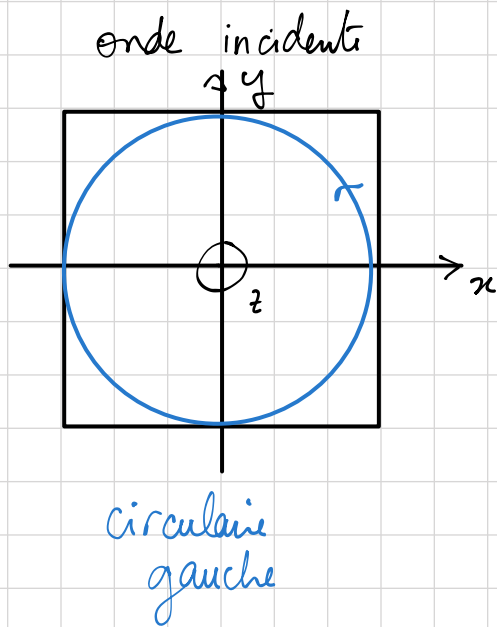
Exercice 2

1) La réflexion entraîne un changement de signe :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + k z) \vec{u}_x - E_0 \sin(\omega t + k z) \vec{u}_y$$

$\uparrow$ propagation suivant $-\vec{u}_z$ pour l'onde réfléchie

2)



Exercice 3

1) On écrit la loi des mailles:

$$u(x, t) - u_L - u(x + dx, t) = 0$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial u}{\partial x} dx - \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

soit $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1)$

On écrit la loi des nœuds:

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_c$$

$$\Rightarrow i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

soit $\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (2)$

2) On dérive (1) par rapport à x et (2) par rapport à t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = - \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

u est solution de l'équation de propagation:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

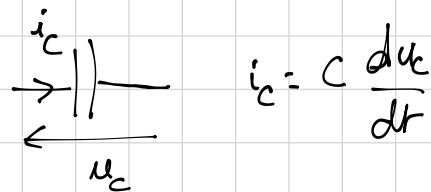
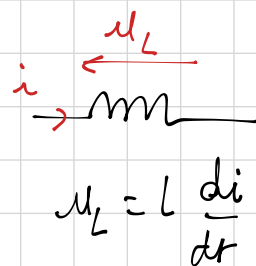
On montre de la même façon que i est

solution de l'équation $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$

On note $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$ la vitesse de propagation dans le câble

(c proche de $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$)

(a) On injecte i dans l'équation de propagation:



$$-k^2 \underline{i} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{i} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Relation de dispersion.

$$b) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda j\omega \left(i_0 e^{j(\omega t - kn)} + i_1 e^{j(\omega t + kn)} \right)$$

On intègre: $\underline{u}(n, t) = -\Lambda j\omega \left(\frac{i_0}{-jk} e^{j(\omega t - kn)} + \frac{i_1}{jk} e^{j(\omega t + kn)} \right)$

$$\underline{u}(n, t) = \Lambda \frac{\omega}{k} i_0 e^{j(\omega t - kn)} - \frac{\Lambda \omega}{k} i_1 e^{j(\omega t + kn)}$$

$$\Lambda \frac{\omega}{k} = \Lambda c = \Lambda \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Finalement: $\underline{u}(n, t) = Z_c i_0 e^{j(\omega t - kn)} - Z_c i_1 e^{j(\omega t + kn)}$

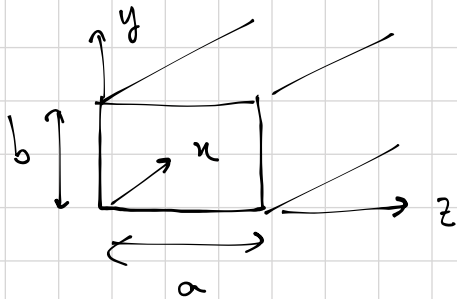
c) On écrit $\underline{u}(l, t) = Z_0 \underline{i}(l, t)$

$$Z_c i_0 e^{-jk l} - Z_c i_1 e^{jk l} = Z_0 i_0 e^{-jk l} + Z_0 i_1 e^{jk l}$$

$$\Rightarrow \underline{i}_1 = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} e^{-2jkl} i_0$$

① n'y a pas d'onde réfléchie dans le câble à condition d'avoir $Z_0 = Z_c$ (voir en TP impédance de sortie du GBF = 50Ω...)

Exercice 4



1) En $z=0$

$$\vec{E} = 0 \quad \vec{n}_{12} = \vec{u}_z$$

① ②

La condition aux limites s'écrit

$$\vec{E}(z=0) = \frac{\sigma(0)}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{u}_y = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{f(0) = 0}$$

On obtient de la même façon $f(a) = 0$.

2) L'onde se propage dans le vide, $\vec{E}$ est donc solution de l'équation de propagation:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit $\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$ en projection sur $\vec{u}_y$

$$\Rightarrow -k^2 f(z) + f''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0$$

f est donc solution de l'équation

$$f''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(z) = 0$$

f doit s'annuler en $z=0$ et $z=a$, $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ est donc positif

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = K^2 \quad \text{et} \quad f(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

On détermine ensuite A et B :

$$\begin{cases} A = 0 \\ A \cos(Ka) + B \sin(Ka) = 0 \end{cases}$$

On a ainsi $Ka = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

et $f(z) = E_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right)$

4. $\vec{E} = E_n \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) e^{i(\omega t - kn)} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E} = E_n \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kn) \vec{u}_y$

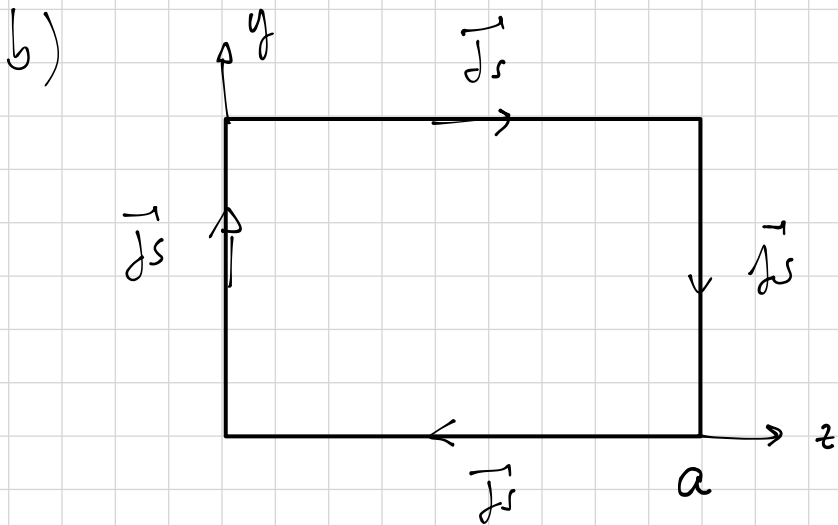
On écrit l'équation de Maxwell - Faraday: $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kn) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \frac{\pi}{a} E_n \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kn) \vec{u}_x + k E_n \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kn) \vec{u}_z$$

$$\text{Soit } \vec{B} = \frac{\pi}{a\omega} \frac{E_1}{1} \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) \sin(\omega t - kn) \vec{u}_x + \frac{k}{\omega} E_1 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t - kn) \vec{u}_z$$

$\vec{B}$ a une composante suivant $\vec{u}_x$: $\vec{B}$ n'est pas transverse



$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{0} \quad \text{si } (1) = \text{conducteur}$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$\rightarrow \vec{B}_2$ est tangent aux conducteurs

$\Rightarrow$ La composante B_x est non nulle au niveau des conducteurs qui sont tous parcourus par $\vec{J}_s$ non nuls

$$c) \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos nh \rangle = 0$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k E_1^2}{2 \mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) \vec{u}_x$$

Exercice 5.

Q9. On écrit l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{j}) = \text{div}(\gamma_0 \vec{E}) \\ \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \text{div} \vec{j} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho$$

La densité volumique de charges ρ est donc solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0}$$

On pose $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$. Dans le cas où $\rho(M, 0) = \rho_0$, on a

$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-t/\tau'}$ qui peut être considérée comme nulle au bout de τ' .

Q10. A.N. : $\tau' = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{3,8 \cdot 10^7} = 2,3 \cdot 10^{-19} \text{ s}$

Pour $f = 18 \text{ MHz}$, $\tau' \ll \frac{1}{f}$ période du signal, on peut donc considérer que le conducteur est globalement neutre.

Les équations de Maxwell dans le conducteur s'écrivent donc :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On peut montrer (ce} \\ \text{a été fait dans les questions précédentes} \end{array} \right\}$$

$$\text{qu } \frac{j\omega}{j} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma_0} = \omega \tau' \ll 1$$

$$\left(\text{avec } \vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Q11. $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}_c) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}_c) - \Delta \vec{E}_c$

$$\Rightarrow \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{0} - \Delta \vec{E}_c$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma_0 \vec{E}_c) = \Delta \vec{E}_c$$

Le champ électrique au sein du conducteur est donc solution de l'équation :

$$\Delta \vec{E}_c - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad D = \frac{1}{\mu_0 \gamma_0} \quad \text{en } (m^2 \cdot s^{-1})$$

(D est un coefficient de diffusion)

Q12. On a ainsi : $-\frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial t} = \vec{0}$

(en injectant $\vec{E}_c$ dans l'équation précédente)

soit

$$\underline{k}_t^2 = -i\omega\mu_0\gamma_0$$

$$\left(\frac{1}{D} = \gamma_0\mu_0\right)$$

Q13. $\underline{k}_t^2 = e^{-i\pi/2} \omega\mu_0\gamma_0$

$$e^{-i\pi/2} = \left(e^{-i\pi/4}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{k}_t^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}\right)^2$$

Soit en choisissant $\underline{k}_t = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 0$: $\underline{k}_t = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$

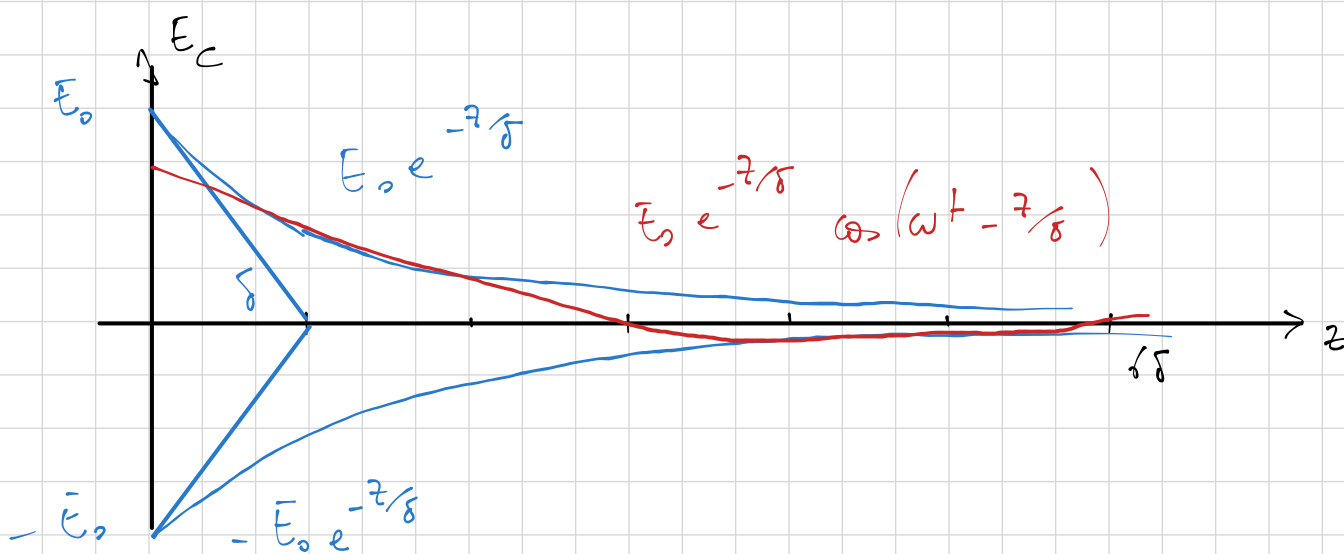
Q14. On a alors :

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{i z}{\delta})} \vec{e}_x$$

$$= \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{E}_c = \text{Re}(\vec{E}_c) = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma_0\mu_0\omega}}$$

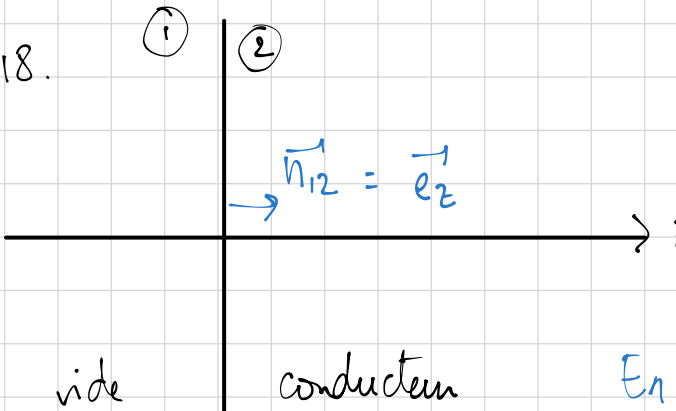


Q16. δ est appelée épaisseur ou profondeur de peau. δ représente l'épaisseur du conducteur sur laquelle $\vec{E}_c$ est non nul.

A.N. : $\delta = \left(\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 2\pi \times 1,4 \cdot 10^7 \times 3,8 \cdot 10^7}\right)^{1/2} = 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Q17. $\vec{E}_r = E_{0,r} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x$: même pulsation et même polarisation que le champ incident, $\vec{E}_r$ se propage suivant $-\vec{u}_z$.

Q18.



① | ②

vide | conducteur

$\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$

$\vec{E}_2 = \vec{E}_c$
 $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

En $z=0$: $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$ avec $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$

On projette cette relation sur $\vec{e}_x$:

$$E_{c0} - (E_{i0} + E_{r0}) = 0$$

On a ainsi

$$\underline{t} - \underline{r} = 1$$

Q19. On utilise la relation de structure des OPPM dans le vide:

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y & (\vec{u} = \vec{e}_z) \\ \vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y & (\vec{u} = -\vec{e}_z) \end{cases}$$

Dans le conducteur, on peut également écrire:

$$\vec{B}_c = \frac{\vec{k}_c \wedge \vec{E}_c}{\omega} \quad \text{avec} \quad \vec{k}_c = k_c \vec{e}_z \quad \left(\text{car } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_c = \frac{1-i}{\delta \omega} E_{0c} e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_y$$

Q20. Dans le cas du champ magnétique: $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$ ($u=0$)

En considérant que les courants surfaciques sont nuls: $\vec{j}_s = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{1-i}{\delta \omega} E_{0c} - \left(\frac{E_{0i}}{c} - \frac{E_{0r}}{c} \right) = 0$$

$$\text{soit } \frac{1-i}{\delta h} \underline{t} + \frac{1}{c} \underline{\tau} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1-i}{\delta h} \underline{t} + \underline{\tau} = 1}$$

Q21. On a alors :

$$\begin{cases} \underline{t} - \underline{\tau} = 1 \\ \frac{1-i}{\delta h} \underline{t} + \underline{\tau} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{1-i}{\delta h} \right) \underline{t} = 2 \\ \underline{\tau} = \underline{t} - 1 \end{cases}$$

$$\text{soit } \boxed{\underline{t} = \frac{2\delta h}{\delta h + 1 - i} \quad \underline{\tau} = \frac{\delta h - 1 + i}{\delta h + 1 - i}}$$