

ELECTROMAGNETISME - TD4 - Plasma (1)

Exercice 1

$$1) (a) \quad k(\omega_2) \approx \underbrace{k(\omega_0)}_{k_0} + \frac{\delta\omega}{2} \underbrace{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}}_{1/v_g} \Rightarrow \underline{k_2 = k_0 + \frac{\delta\omega}{2} \frac{1}{v_g}}$$

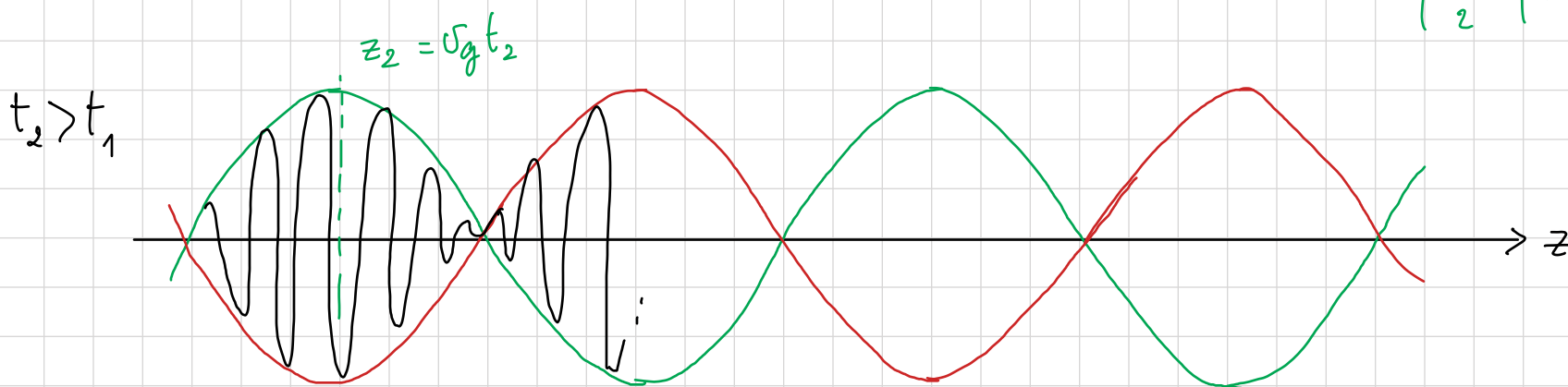
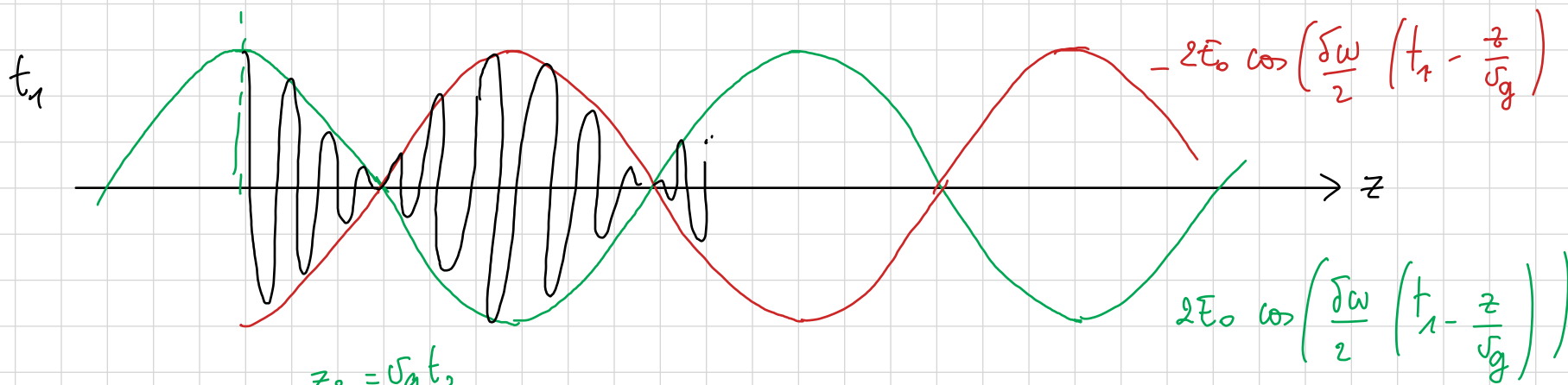
De même $\underline{k_1 = k_0 - \frac{\delta\omega}{2} \frac{1}{v_g}}$

$$(b) \quad \vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) \vec{u}_x + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = 2 E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} z\right) \vec{u}_x$$

$$\begin{cases} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0 & \frac{k_1 + k_2}{2} = k_0 \\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\delta\omega}{2} & \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{\delta\omega}{2 v_g} \end{cases}$$

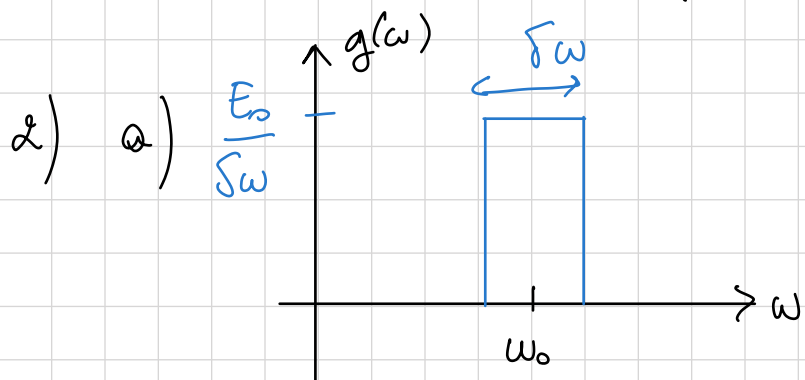
On a alors : $\vec{E} = 2 E_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 z)}_{\substack{\text{OPPM } \omega_0, k_0 \\ \text{signal haute fréquence}}} \underbrace{\cos\left(\frac{\delta\omega}{2} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right)}_{\text{enveloppe basse fréquence}} \vec{u}_x$



L' envelope basse fréquence se propage à la vitesse v_g .

Rq : * On ne peut pas vraiment parler de paquet d'ondes ici car le signal reste étendu sur $]-\infty, +\infty[$

* La superposition de deux signaux de fréquences proches donne lieu à des battements (utilisé pour accorder des instruments).



b) On écrit $k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$

$$= k_0 + \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}(z, t) = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\left((\omega - \omega_0)t - \frac{\omega - \omega_0}{v_g} z\right)} d\omega \underline{\underline{u}}_x$$

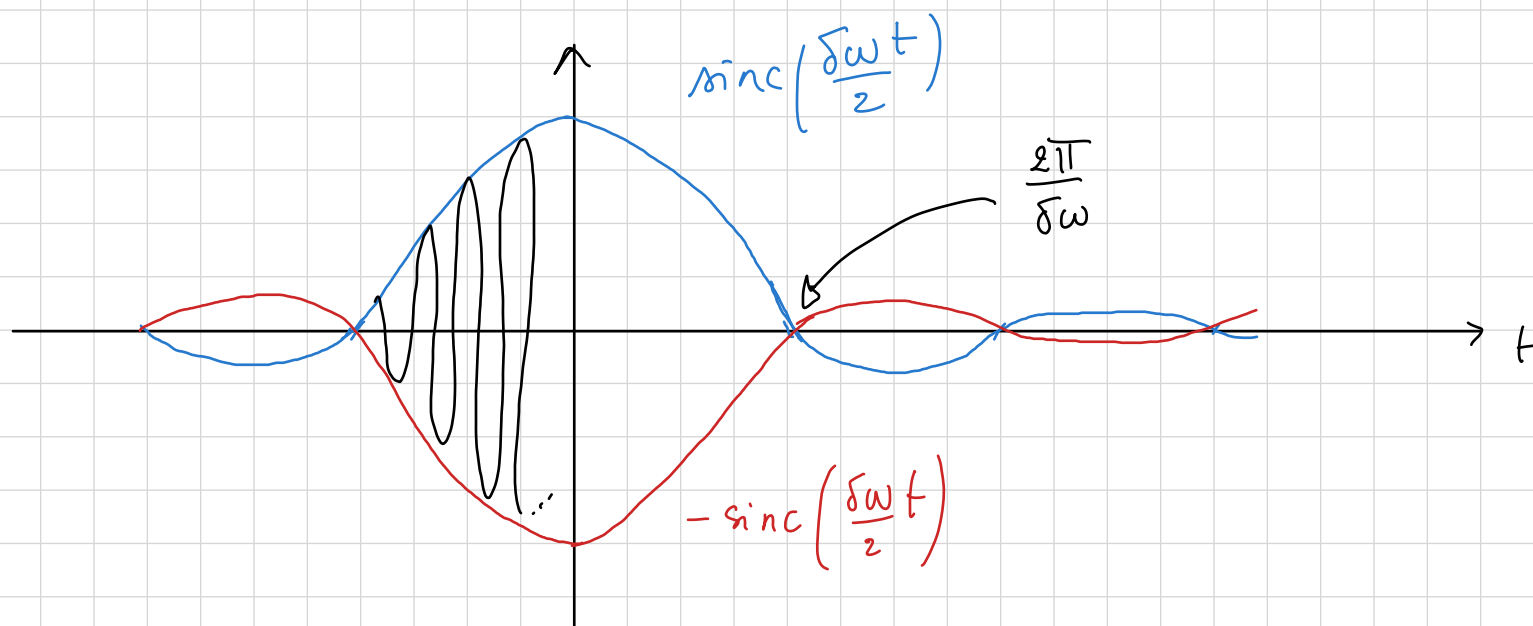
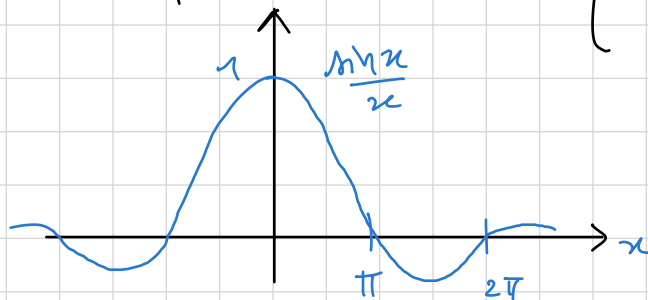
$$c) \underline{\underline{E}}(z, t) = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)(t - z/v_g)}}{i(t - z/v_g)} \right]_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{\underline{u}}_x$$

$$= \frac{E_0}{\delta\omega} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{e^{i\frac{\delta\omega}{2}(t - z/v_g)} - e^{-i\frac{\delta\omega}{2}(t - z/v_g)}}{i(t - z/v_g)} \underline{\underline{u}}_x$$

$$= E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{\sin\left(\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right)}{\frac{\delta\omega}{2}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)} \underline{\underline{u}}_x$$

On a ainsi
$$E(z, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta\omega}{2} \left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right)$$

avec
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



La largeur δt du paquet d'ondes est de l'ordre de $\frac{2\pi}{\delta\omega}$

↳ On vérifie bien $\delta t \sim \frac{1}{\delta\omega}$.

Exercice 2

1) En absence de $\vec{B}_0$, la vitesse $\vec{v}$ des électrons est colinéaire à $\vec{E}$.

On regarde la perturbation ajoutée par le terme $\vec{v}_\perp \vec{B}_0$ de la force de Lorentz en considérant $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{E}$

⇒ si $\vec{B}_0$ parallèle à $\vec{E}$, $\vec{v}_\perp \vec{B}_0 = \vec{0}$ situation n changée par rapport au cas $\vec{B} = \vec{0}$: $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$

⇒ si $\vec{B}_0 \perp \vec{E}$ $\vec{v}_\perp \vec{B}_0 \neq \vec{0}$, il faut modifier la relation de dispersion.

2) On note $\kappa = \omega^2$ $\kappa_p = \omega_p^2$ $\kappa_c = \omega_c^2$

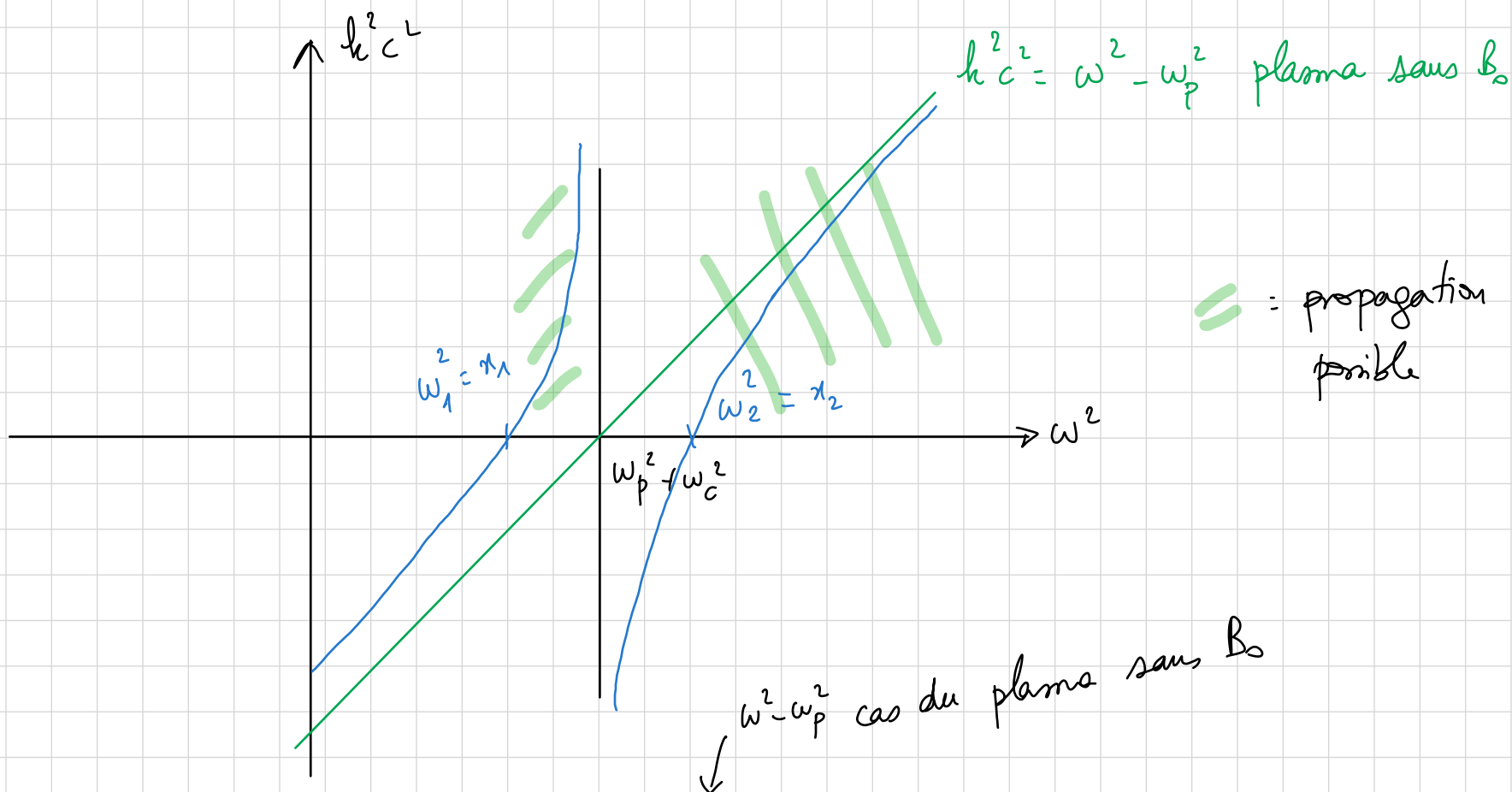
$$k^2 c^2 = \frac{x^2 - (2x_p + x_c)x + x_p^2}{x - x_p - x_c}$$

$$\Delta = 4x_p x_c + x_c^2$$

Le numérateur s'annule pour $x_1 = x_p + \frac{x_c}{2} - \sqrt{\frac{x_c^2}{4} + x_p x_c}$

$$x_2 = x_p + \frac{x_c}{2} + \sqrt{\frac{x_c^2}{4} + x_p x_c}$$

x_1 et x_2 sont de même signe ($x_1 x_2 = x_p^2 > 0$)



$$R_0 : \frac{x^2 - (2x_p + x_c)x + x_p^2}{x - x_p - x_c} - (x - x_p) = - \frac{x_p x_c}{x - x_p - x_c} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ la propagation est possible pour

$$\omega_p^2 + \frac{\omega_c^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega_c^4}{4} + \omega_p^2 \omega_c^2} < \omega^2 < \omega_p^2 + \omega_c^2$$

$$\omega_p^2 + \frac{\omega_c^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_c^4}{4} + \omega_p^2 \omega_c^2} < \omega^2$$

3) $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ propagation pour $f > f_p \Rightarrow \lambda < \lambda_p$

$$\omega_p = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}} \quad (A.N. \quad \omega_p = 4,41 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1})$$

$$\Rightarrow n_0 = \frac{4\pi^2 c^2 m \epsilon_0}{\lambda_0^2 e^2} = \frac{4\pi^2 m}{\mu_0 \lambda_0^2 e^2}$$

A.N. : $n_0 = 6,1 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$

2) On calcule $\omega_c = \frac{e B_0}{m} \Rightarrow \omega_c = 8,234 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$

On obtient $\left(\begin{array}{l} \omega_2 = 4,84 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1} \\ \lambda_2 = 38,9 \text{ m} \end{array} \right)$ et $\omega_1 = 4,02 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$
 $\lambda_1 = 46,9 \text{ m}$

c'est bien la valeur de l'énoncé

c) $1 + \frac{x^2}{R^2} = \left(\frac{B(0)}{B(x)} \right)^{2/3} \Rightarrow x = R \sqrt{\left(\frac{B(0)}{B(x)} \right)^{2/3} - 1}$

A.N. : $x \simeq 3,1 \cdot 10^2 \text{ km} \Rightarrow$ on peut mesurer l'altitude de la couche ionisée.

Exercice 3 :

1) PFD appliqué à un électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{-e}{m i \omega} \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{n e^2}{m i \omega} \vec{E}$$

Soit $\underline{\gamma} = \frac{n e^2}{m i \omega}$

2) Equation locale de conservation de la charge:

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \text{div } \vec{E} + i\omega \rho = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\gamma}{\epsilon_0} + i\omega \right) \rho = 0$$

soit $\underline{\gamma} = -i\omega \epsilon_0$ si on suppose $\rho \neq 0$

3) On a alors: $\frac{n e^2}{m i\omega} = -i\omega \epsilon_0$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0}$ soit $\underline{\omega} = \omega_p$ résonance plasma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{n e^2}{m i\omega} \vec{E} + i\omega \epsilon_0 \vec{E} \right) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$= \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{k}_n \cdot \vec{B} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ soit $\vec{B} = \vec{0}$

On en déduit $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{k}_n \cdot \vec{E} = 0$ l'onde est longitudinale
($\vec{k}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires).